Les nombres complexes - Les nombres imaginaires

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Les nombres imaginaires sont introduits à partir de la définition de la racine carré appliquée à un nombre négatif.

Vidéo https://clipedia.be/videos/les-nombres-imaginaires

Les nombres imaginaires et les nombres complexes constituent un outil mathématique qui permet de faciliter grandement le traitement mathématique d'un très vaste nombre de phénomènes en physique (optique, relativité, mécanique quantique, électricité, ...)

Résumé

- La racine carrée d'un nombre x est le nombre qui multiplié par lui-même donne x. Puisque le produit d'un nombre par lui-même donne toujours un nombre positif (même si celui-ci est négatif car « moins par moins donne plus »), il est *a priori* impossible de définir la racine d'un nombre négatif.
- Il est néanmoins possible d'établir de nouvelles règles de calcul qui permettent de définir la racine d'un nombre négatif. À cette fin un nouveau nombre a été inventé, le nombre *unité imaginaire*, aujourd'hui noté i, qui ne peut pas être calculé dans le champ des nombres réels, et qui est la racine carrée de -1 :
$$\sqrt{-1} \equiv i \quad \Leftrightarrow \quad i^2 = -1$$
- Tout nombre réel multiplié par l'unité imaginaire engendre un nombre imaginaire.
- En conséquence, la racine carrée d'un nombre négatif $-a$ (avec $a > 0$) peut s'écrire sous la forme d'un *nombre imaginaire*
$$\sqrt{-a} = i\,\sqrt{a}$$
L'équation $x^2 = -a$ dans laquelle $a > 0$ a pour solutions $x = +i\,\sqrt{a}$ et $x = -i\,\sqrt{a}$.
- De même que les nombres réels peuvent être placés le long de la droite des réels $\mathbb{R}$, les nombres imaginaires peuvent être placés le long d'un axe imaginaire $\mathbb{I}$. Ces deux ensembles possèdent en commun le seul élément $0 = 0\,i$.
- L'association d'un nombre réel (a) et d'un nombre imaginaire ($i\,b$) sous la forme d'une addition donne un *nombre complexe* ($a + i\,b$).