Les nombres complexes - Les nombres complexes

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Premier contact avec les nombres complexes au travers des opérations de base (addition et multiplication).

Vidéo https://clipedia.be/videos/les-nombres-complexes

Résumé

- L'unité imaginaire est $i = \sqrt{-1}$. Elle n'est pas calculable dans le champ des nombres réels.
- Un nombre complexe z est de la forme $z = x + i\,y$ où x et y sont des réels.
- La partie réelle de z est x et la partie imaginaire de z est y :

$$z = x + i\,y \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = x \\ \mathrm{Im}(z) = y \end{array} \right.$$

  (Ne pas confondre la *partie* imaginaire y et le *terme* imaginaire $i\,y$.)
- L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres imaginaires est noté $\mathbb{I}$ et l'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Ils ont comme seul élément commun le nombre $0 = 0\,i = 0 + 0\,i$.
- Pour additionner (soustraire) deux nombres complexes, il faut additionner (soustraire) séparément leurs parties réelles entre elles et leurs parties imaginaires entre elles :

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = x_1 + i\,y_1 \\ z_2 = x_2 + i\,y_2 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

- Pour multiplier un nombre complexe par un réel, il faut multiplier séparément sa partie réelle et sa partie imaginaire par ce nombre réel (la multiplication est distribuée sur la partie réelle et sur la partie imaginaire) :

$$z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad az = ax + i\,ay$$

- Pour multiplier un nombre complexe par un autre nombre complexe, il faut appliquer la distributivité de la multiplication sur l'addition (sans oublier que $i^2 = -1$) :

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = x_1 + i\,y_1 \\ z_2 = x_2 + i\,y_2 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- Le carré d'un nombre complexe vaut

$$z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad z^2 = (x^2 - y^2) + i\,(2xy)$$

Ce résultat s'obtient en prenant $z_2 = z_1$ dans la formule précédente ou par la formule du produit remarquable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

- Le conjugué z^* d'un nombre complexe z est ce nombre complexe dont la partie imaginaire est changée de signe :

$$z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad z^* = x - i\,y$$

- Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel :

$$z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad zz^* = x^2 + y^2$$

Ce résultat s'obtient par la formule de la multiplication de deux nombres complexes ou par la formule du produit remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Le module $|z|$ d'un nombre complexe z est la racine carrée du produit de ce nombre complexe par son conjugué :

$$z = x + i\,y \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} |z| & = & \sqrt{zz^*} & = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ |z|^2 & = & zz^* & = & x^2 + y^2 \end{array} \right.$$