Les nombres complexes - Division des nombres complexes

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Explication de la technique de calcul d'un quotient de nombres complexes.

Vidéo https://clipedia.be/videos/division-des-nombres-complexes

Cette séquence exploite plusieurs définitions et règles vues précédemment. Il est nécessaire de les avoir présentes à l'esprit.

Résumé

- La division d'un nombre complexe $a + i\,b$ par un nombre complexe $c + i\,d$ donne un nouveau nombre complexe $x + i\,y$:

$$\frac{a + i\,b}{c + i\,d} = x + i\,y$$

- L'inverse d'un nombre complexe est égal à son conjugué divisé par son module au carré :

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

  Cette propriété se démontre simplement en multipliant haut et bas le membre gauche de l'égalité par le conjugué du dénominateur.

- Elle permet de calculer facilement le quotient de deux nombres complexes :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a + i\,b}{c + i\,d} = \frac{(a + i\,b)(c - i\,d)}{c^2 + d^2}$$

- Sans cette propriété, il aurait été beaucoup plus long de calculer le quotient $x + i\,y$:
  1. multiplier les deux membres de l'égalité par le dénominateur et simplifier :
     $a + i\,b = (c + i\,d)(x + i\,y)$
  2. effectuer la multiplication (sans oublier que $i^2 = -1$) :
     $a + i\,b = (cx - dy) + i\,(dx + cy)$
  3. identifier les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles, puis résoudre le système en x et y :
     $\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$