

Les nombres complexes - Produits et puissances de nombres complexes

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Interprétation géométrique et formulation des produits et des puissances des nombres complexes.

Vidéo <https://clipedia.be/videos/produits-et-puissances-de-nombres-complexes>

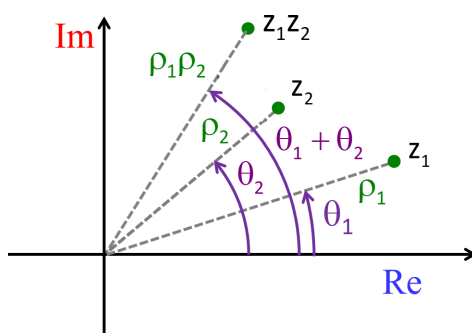
Cette séquence exploite plusieurs définitions et règles vues précédemment. Il est nécessaire de les avoir présentes à l'esprit.

Résumé

- Le produit de deux nombres complexes quelconques est un nombre complexe dont
 - le module est égal au produit de leurs modules;
 - l'argument est égal à la somme de leurs arguments.

$$[\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)] [\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] = \rho_1 \rho_2 (\cos[\theta_1 + \theta_2] + i \sin[\theta_1 + \theta_2])$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{array} \right\} \rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ où } \begin{cases} \rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$



- Une puissance entière d'un nombre complexe (c.-à-d. ce nombre complexe multiplié par lui-même un nombre entier de fois) est un nombre complexe dont
 - le module vaut cette puissance du module du nombre complexe de départ;
 - l'argument vaut ce multiple de l'argument du nombre complexe de départ.

$$[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \rightarrow z_1^n = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ où } \begin{cases} \rho = \rho_1^n \\ \theta = n\theta_1 \end{cases}$$



- En particulier, le produit de deux nombres complexes dont le module vaut 1 est un nombre complexe dont le module vaut encore 1 et dont l'argument est la somme des arguments des deux premiers; dans le plan de Gauss ils sont tous les trois représentés par des points situés sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- De même, le carré d'un nombre complexe dont le module vaut 1 est aussi un nombre complexe dont le module vaut encore 1 et dont l'argument est le double de l'argument du premier; dans le plan de Gauss ils sont tous les deux représentés par des points situés sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- En particulier, les produits et les carrés de nombres complexes dont le module vaut 1 sont des nombres complexes dont le module vaut encore 1.
L'argument d'un produit est la somme des arguments des nombres multipliés.
L'argument d'un carré est le double de l'argument du nombre élevé à cette puissance.
Dans le plan de Gauss tous ces nombres complexes sont représentés par des points situés sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

