Les nombres complexes - Puissances négatives de nombres complexes

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Interprétation géométrique et formulation des puissances négatives de nombres complexes.

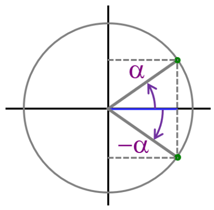
Vidéo https://clipedia.be/videos/puissances-negatives-de-nombres-complexes

Cette séquence exploite plusieurs définitions et règles vues précédemment. Il est nécessaire de les avoir présentes à l'esprit.

Résumé

- La manipulation de la forme polaire des nombres complexes recourt fréquemment aux identités suivantes, toujours aisées à retrouver en visualisant un cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$



- Dans la séquence précédente, nous avons établi que, pour un nombre n entier positif

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) \quad \rightarrow \quad z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)]$$

  Ce résultat prend une forme plus simple dans le cas particulier d'un nombre complexe de module unitaire ($\rho = 1$) :

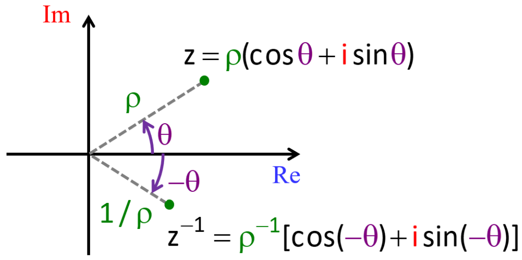
$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)$$

  C'est la formule de *Moivre* (du nom de Abraham de Moivre qui l'a établie).

- Dans cette séquence-ci, nous avons montré que

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) \quad \rightarrow \quad z^{-n} = \rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i\ \sin(-n\theta)]$$

- Dans le cas particulier où l'exposant vaut -1, la représentation géométrique de la puissance dans le plan de Gauss est particulièrement simple.



- Pour un exposant nul, la formule précédente donne 1, qui est bien le résultat attendu.
- Par conséquent, la formule rappelée au début de ce résumé, valable pour un exposant n entier positif, reste valable pour un exposant entier négatif.