Les nombres complexes - Racines de nombres complexes

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Interprétation géométrique et formulation des racines de nombres complexes.

Vidéo https://clipedia.be/videos/racines-des-nombres-complexes

Cette séquence exploite plusieurs définitions et règles vues précédemment. Il est nécessaire de les avoir présentes à l'esprit.

Résumé

- Une *racine* est la même opération qu'une *puissance fractionnaire* :

$$\sqrt{z} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} \qquad \ldots \qquad \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

- Il est tentant de déterminer la racine d'un nombre complexe en étendant telle quelle aux puissances fractionnaires la règle vue précédemment, valable pour les puissances entières :

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) \quad \to \quad z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos(\tfrac{1}{n}\theta) + i\ \sin(\tfrac{1}{n}\theta)\right]$$

- … et de généraliser à n'importe quel exposant fractionnaire (rationnel) :

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) \quad \to \quad z^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos(\tfrac{m}{n}\theta) + i\ \sin(\tfrac{m}{n}\theta)\right]$$

- Néanmoins, vu la périodicité des fonctions cosinus et sinus, un nombre complexe reste inchangé en ajoutant ou en retranchant n'importe quel nombre entier k de tours à son argument (l'argument d'un nombre complexe n'est jamais défini qu'à 2π rad (360°) près) :

$$\rho\left[\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\right] = \rho\left[\cos(\theta + k2\pi) + i\ \sin(\theta + k2\pi)\right]$$

  avec $k \in \mathbb{Z}$.

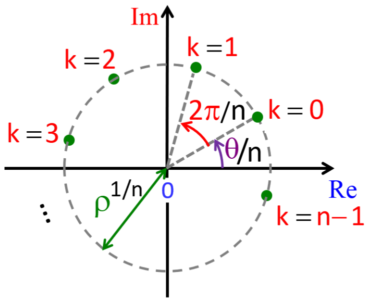
- L'application de la même règle de division de l'argument fait à présent apparaître dans l'argument des racines des nombres fractionnaires $\frac{k}{n}$ de tour 2π :

$$z = \rho(\cos\theta + i\ \sin\theta) \quad \to \quad z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos(\tfrac{1}{n}\theta + \tfrac{k}{n}2\pi) + i\ \sin(\tfrac{1}{n}\theta + \tfrac{k}{n}2\pi)\right]$$

  avec $k \in \{0, 1 \ldots n-1\}$.

- Si l'addition ou la soustraction d'un *nombre entier* de tours à l'argument d'un nombre complexe ne change rien à ce nombre, il n'en est pas de même d'une *fraction* de tour.

  Un nombre complexe possède donc n racines n-ièmes distinctes qui correspondent à n valeurs successives de k, par exemple celles comprises entre 0 et $n-1$. Toutes les autres valeurs de k conduisent à des racines redondantes (leurs arguments et les arguments des premières ne diffèrent plus que par un nombre entier de tours).



- Exemples : $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{1}$: