Les matrices - Introduction

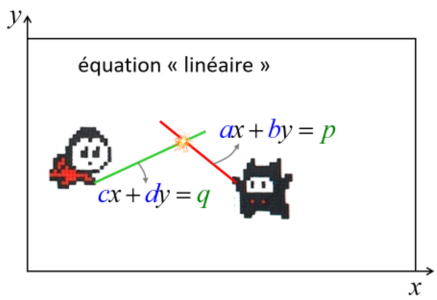
Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Le concept mathématique de matrice est introduit dans le contexte de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Le lecteur est amené à découvrir la notation des matrices, le produit matriciel (entre une matrice carrée et une matrice colonne), la notion de déterminant, de matrice inverse et la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Un exemple concret simple

Imaginons que nous voulons trouver les coordonnées x et y du point d'intersection de deux droites. Chacune répond à une certaine équation linéaire [1] (les x et y apparaissent chacun au 1$^{\text{er}}$ degré) :

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$



Leur point d'intersection appartient à chacune des deux droites, donc ses coordonnées x et y doivent satisfaire les deux équations simultanément. Mathématiquement, ces équations forment un système (ici de deux équations à deux inconnues) :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Le calcul matriciel permet de trouver, en une seule opération, le couple de nombres (x, y) qui constitue la solution de ce système. On peut donc dire, en quelque sorte, qu'une telle opération est « collective » (deux inconnues sont trouvées en une opération). C'est le grand intérêt des matrices, elles permettent d'effectuer des opérations mathématiques sur une grandes quantité de nombres simultanément. En langage matriciel le système se traduit comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Chaque tableau de nombres entre parenthèses est une matrice. Dans le membre de droite les deux matrices sont multipliées entre elles. Le produit matriciel doit donc être défini de manière à retrouver dans cette écriture le système d'équations de départ. C'est ce dont nous discutons dans la section suivante.

1. Pour plus d'explications sur l'équation de la droite, voir *L'équation de la droite* dans la section *Géométrie* de CliPéDia : https://clipedia.be/videos/la-droite-dans-le-plan-equation-cartesienne à 17 min 21 s.

Produit de matrices

Le fait qu'il faille retrouver le système d'équations à partir de cette écriture matricielle va nous guider pour découvrir quelques premières règles de calcul matriciel.

Nous retrouvons le membre gauche de la première équation en multipliant les nombres de la première ligne de la première matrice (a, b) par ceux de la première (et unique) colonne de la deuxième matrice (x, y), puis en additionnant les résultats.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ \end{pmatrix}$$

Et nous retrouvons le membre gauche de la deuxième équation en multipliant les nombres de la deuxième ligne de la première matrice (c, d) par ceux de la première colonne de la deuxième matrice (x, y), puis en additionnant les résultats.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Ces opérations rappellent des produits scalaires :

— le produit scalaire de la première ligne avec la première colonne

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by$$

— le produit scalaire de la deuxième ligne avec la première colonne

$$(c, d) \cdot (x, y) = cx + dy$$

De cette manière, le produit des deux matrices fournit bien ce que nous voulions :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Égalité de matrices

Après avoir effectué le produit des deux matrices, nous obtenons une égalité entre deux matrices :

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Pour retrouver les deux équations elles-mêmes, nous devons admettre que deux matrices sont égales si chaque élément dans l'une est égal à l'élément qui est situé à la même position (ligne, colonne) dans l'autre.

Notation symbolique des matrices

Afin de pouvoir désigner les matrices plus facilement, attribuons-leur des symboles :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

— **A** est la matrice du système d'équations, elle contient les coefficients des inconnues x et de y. Elle possède deux lignes et deux colonnes ; c'est une matrice 2×2 (sous-entendu à 2 lignes et 2 colonnes). Il s'agit d'une matrice carrée (même nombre de lignes et de colonnes).

— $\mathbf{X}$ est la matrice des inconnues x et y. Elle possède deux lignes et une seule colonne ; c'est une matrice 2×1 (sous-entendu à 2 lignes et 1 colonne). C'est une matrice colonne, ou plus simplement un vecteur colonne ;
— $\mathbf{P}$ est la matrice des termes indépendants. C'est aussi une matrice colonne 2×1 ou un vecteur colonne.

Avec cette notation, nous arrivons à une écriture très compacte :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{P}$$

Inverse d'une matrice

Nous pourrions être tentés de résoudre cette équation en écrivant simplement

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{P}$$

mais cette opération n'a rien de la division par un simple nombre. Dans la suite nous allons non seulement découvrir que cette opération est permise et a du sens, mais aussi trouver comment la réaliser au moyen des quatre opérations arithmétiques de base. L'aboutissement sera la découverte des éléments de $\mathbf{A}^{-1}$.

Résolution ordinaire du système

Afin de découvrir les éléments de la matrice $\mathbf{A}^{-1}$, résolvons le système de manière ordinaire, par élimination de variables. La longueur du processus montrera bien l'intérêt d'une résolution matricielle. Rappelons que le système est

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Commençons par éliminer y. Pour cela, multiplions la première équation par d (qui est le facteur de y dans la seconde) et la seconde par b (qui est le facteur de y dans la première) :

$$\left\{ \begin{array}{l|l} ax + by = p & \times d \\ cx + dy = q & \times b \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} adx + bdy = dp \\ cbx + dby = bq \end{cases}$$

Soustrayons la seconde de la première. Les termes bdy se simplifient. Il reste :

$$adx - bcx = dp - bq$$

Mettons x en évidence dans le membre gauche :

$$(ad - bc)x = dp - bq$$

Isolons enfin x :

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$$

Recommençons, mais cette fois en éliminant x. Pour cela, multiplions la première équation par c (qui est le facteur de x dans la seconde) et la seconde par a (qui est le facteur de x dans la première) :

$$\left\{ \begin{array}{l|l} ax + by = p & \times c \\ cx + dy = q & \times a \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} acx + bcy = cp \\ acx + ady = aq \end{cases}$$

Soustrayons la seconde de la première. Les termes acx se simplifient. Il reste :

$$bcy - ady = cp - aq$$

Mettons y en évidence dans le membre gauche :

$$(bc - ad)y = cp - aq$$

Changeons les deux membres de signe (l'utilité apparaîtra un peu plus loin) :

$$(ad - bc)y = aq - cp$$

Isolons enfin y :

$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Déterminant d'une matrice 2 x 2

Nous voyons que le même dénominateur $ad - bc$ apparaît dans les solutions de x et y :

$$\begin{cases} x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \\[2ex] y = \dfrac{aq - cp}{ad - bc} \end{cases}$$

Ce nombre est calculé en utilisant tous les éléments que de la matrice $\mathbf{A}$, et seulement eux. Il est la différence entre le produit ad des éléments de sa diagonale principale ($\searrow$) et le produit bc des éléments de son autre diagonale ($\swarrow$). S'il était nul, x et y seraient infinis : le système n'aurait pas de solution. Ce nombre est donc *déterminant* pour l'existence même d'une solution. Pour cette raison il est nommé déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ et il est noté $\det(\mathbf{A})$:

$$\det(\mathbf{A}) \equiv ad - bc$$

En multipliant les expressions de x et y ci-dessus par $\det(\mathbf{A})$, nous pouvons écrire plus simplement :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{A})\, x = & dp - bq \\ \det(\mathbf{A})\, y = aq - cp = & -cp + aq \end{cases}$$

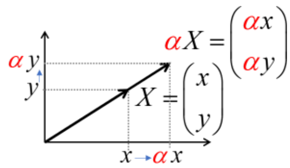
ou encore, en adoptant la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \det(\mathbf{A})\, x \\ \det(\mathbf{A})\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Produit entre un scalaire et une matrice colonne

Examinons à présent la matrice dans le membre gauche. Ses éléments possèdent un facteur commun, det $\mathbf{A}$.

De la même manière que le produit entre un scalaire et un vecteur est un nouveau vecteur obtenu à partir du précédent en multipliant toutes ses composantes par ce scalaire, nous définirons que le produit d'un scalaire et d'une matrice colonne est une nouvelle matrice colonne obtenue à partir de la précédente en multipliant tous ses éléments par ce scalaire ; la multiplication est distribuée sur tous les éléments, l'opération réciproque étant la mise en évidence :



$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle de la solution

Mettons donc $\det(\mathbf{A})$ en évidence :

$$\det(\mathbf{A}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ou encore, en divisant les deux membres par $\det \mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

En comparant cette formule-ci avec la solution $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{P}$ que nous avons écrite plus haut en nous demandant si elle avait du sens, nous pouvons maintenant répondre par l'affirmative puisque nous découvrons comment calculer les éléments de la matrice $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ses éléments ressemblent à ceux de la matrice du système, mais il y a quelques différences :

- les deux éléments de la diagonale principale (↘) ont été intervertis ;
- les deux éléments de l'autre diagonale (↙) ont été changés de signe ;
- et elle est multipliée par $1/\det \mathbf{A}$.

Produit entre un scalaire et une matrice carrée

Pour pouvoir interpréter le résultat obtenu ci-dessus pour $\mathbf{A}^{-1}$, voyons comment effectuer une multiplication entre le scalaire $1/\det \mathbf{A}$ et une matrice 2×2. Pour ce faire, multiplions par 2 un produit matriciel que nous avons déjà rencontré. Nous déduisons successivement :

$$2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{1}{\underset{\downarrow}{=}} 2 \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \overset{2}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{pmatrix} 2ax+2by \\ 2cx+2dy \end{pmatrix} \overset{3}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les justifications des différentes étapes sont les suivantes :

1. application de la loi de multiplication de deux matrices (effectuer le produit)
2. application de la loi de multiplication entre un scalaire et une matrice colonne
3. application de la loi de multiplication de deux matrices (décomposer en un produit)

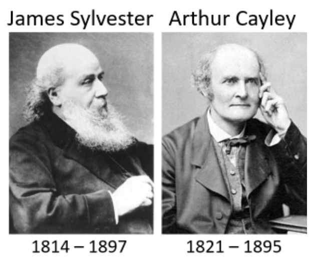
En comparant la première et la dernière expression, nous pouvons conclure que pour multiplier une matrice par 2 il faut multiplier tous les éléments de la matrice par 2.

Ce qui vient d'être fait peut être généralisé à une multiplication par n'importe quel scalaire α :

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

La multiplication qui apparaît dans l'expression de $\mathbf{A}^{-1}$ écrite à la fin de la section précédente a donc du sens et nous sommes parvenus à découvrir comment calculer ses éléments. Le système de deux équations à deux inconnues est finalement résolu.

Conclusion



Avec la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, nous avons abordé un problème extrêmement simple, la plus grande matrice mise en jeu étant une matrice 2×2 à 4 éléments. Il nous a ouvert la porte de quelques raisonnements parmi les plus simples de l'algèbre des matrices. Mais en général les problèmes requièrent l'utilisation de matrices comptant des centaines, des milliers, des millions d'éléments. L'algèbre des matrices est devenue un outil puissant grâce aux développements apportés au XIXe siècle, principalement par deux mathématiciens anglais : James Sylvester, qui a repris et formalisé les travaux de Cramer, et Arthur Cayley, qui a généralisé l'algèbre des nombres à l'algèbre des matrices.

Cette introduction a seulement effleuré le sujet. Il reste donc bien des choses à découvrir à propos des matrices. Nous pouvons par exemple nous demander ce que vaut $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$. Nous n'avons pas encore rencontré le produit de deux matrices carrées… Cela pourrait donner 1, ou la matrice $\mathbf{1}$, et quels en seraient les éléments ?

Voila donc un programme alléchant pour les clips suivants ! Le prochain est consacré à l'addition des matrices :
https://clipedia.be/videos/le-calcul-matriciel-1-l-addition

L'essentiel

- Une matrice est un tableau de nombres caractérisé par son nombre de lignes et de colonnes. Une matrice $m \times n$ comporte m lignes et n colonnes.
- Une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne porte le nom de matrice colonne ou de vecteur colonne et une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes porte le nom de matrice carrée.
- Deux matrices sont égales si tous leurs éléments sont égaux deux à deux, c'est-à-dire si chaque élément de l'une est égal à celui qui occupe la même position (ligne, colonne) dans l'autre.
- Le produit de deux matrices est une nouvelle matrice dont chaque élément est calculé comme le produit scalaire entre une ligne de la première matrice et une colonne de la seconde matrice, la ligne et la colonne à considérer étant celles de l'élément de la

nouvelle matrice que l'on calcule.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Le produit entre deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

- Le déterminant d'une matrice 2×2 vaut

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Le produit entre un scalaire et une matrice colonne ou carrée s'obtient en multipliant tous les éléments de cette matrice par ce scalaire.

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \qquad \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

- Si une matrice 2×2 possède un déterminant non nul, alors son inverse existe et vaut

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Si le déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues est non nul, sa solution peut être trouvée par calcul matriciel :

$$\underbrace{\mathbf{AX} = \mathbf{P}}_{\text{Équations}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}}_{\text{Solutions}} \quad \big(\det(\mathbf{A}) \neq 0\big)$$

ou, plus explicitement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

- De manière générale, les matrices permettent de résoudre collectivement de très grands systèmes d'équations linéaires (énormément d'équations linéaires à énormément d'inconnues).