Les matrices - Formule du déterminant

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Nous établissons la formule du déterminant d'une matrice en termes des cofacteurs des éléments de cette matrice.

L'essentiel

- Lorsqu'il est entièrement développé, le déterminant d'une matrice est une somme (algébrique) de tous les produits possibles entre éléments distincts appartenant à des lignes et à des colonnes différentes. Un déterminant d'ordre N comprend dès lors $N!$ termes.

- La présence de toutes ces combinaisons possibles entraîne que le déterminant peut être calculé en le développant non seulement selon la première colonne, mais aussi selon n'importe quelle autre rangée (ligne ou colonne), à condition de changer les signes des éléments a_{ij} de la *seule* rangée selon laquelle le déterminant est développé lorsque $i + j$ est impair (éléments dans les cases grises).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^{-} & a_{13} & a_{14}^{-} & a_{15} \\ a_{21}^{-} & a_{22} & a_{23}^{-} & a_{24} & a_{25}^{-} \\ a_{31} & a_{32}^{-} & a_{33} & a_{34}^{-} & a_{35} \\ a_{41}^{-} & a_{42} & a_{43}^{-} & a_{44} & a_{45}^{-} \\ a_{51} & a_{52}^{-} & a_{53} & a_{54}^{-} & a_{55} \end{pmatrix}$$

  Cela revient à multiplier *tous* les éléments de cette *seule* rangée par $(-1)^{i+j}$.

- Le calcul d'un déterminant faisait intervenir une somme (algébrique) de produits entre chaque élément d'une rangée et le déterminant « un cran » inférieur qui subsiste en effaçant le reste de la ligne et de la colonne de cet élément. Ce plus petit déterminant est nommé le *mineur* de (pour) cet élément, du latin *minus*, plus petit. En notant M_{ij} le mineur de l'élément a_{ij}, le développement du déterminant s'écrit

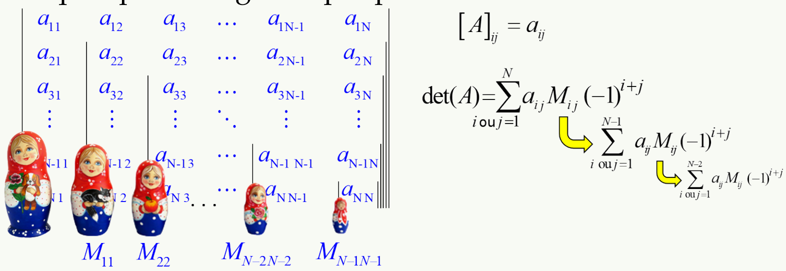
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i \text{ ou } j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

  Attention :
  la somme porte soit sur l'indice j (développement selon la ligne i), soit sur l'indice i (développement selon la colonne j) ; il ne s'agit pas d'une double somme !

  Par exemple le développement du déterminant selon la 1re ligne donne

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{-} & a_{13} \\ a_{21}^{-} & a_{22} & a_{23}^{-} \\ a_{31} & a_{32}^{-} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

- Chaque mineur est lui-même un déterminant à calculer qui, à son tour, en contient d'autres, de rang encore inférieur. La formule précédente masque la complexité du calcul, déjà évoquée par l'image des poupées russes.



- Par définition, le *cofacteur* C_{ij} de l'élément a_{ij} est le mineur M_{ij} de cet élément, affecté d'un changement de signe si $i + j$ est impair :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Le déterminant de la matrice **A** peut finalement s'exprimer par la formule suivante, très condensée :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i \text{ ou } j=1}^{N} a_{ij} C_{ij}$$

  Attention ici encore : la somme porte soit sur l'indice j, soit sur l'indice i, selon que le déterminant est développé selon une ligne (i constant) ou selon une colonne (j constant), mais pas sur les deux, il ne s'agit pas d'une double somme.

- Le choix de développer un déterminant selon une rangée particulière (ligne ou colonne au choix, mais jamais une diagonale) peut être guidé, par exemple, par la présence de plusieurs zéros sur cette rangée, dispensant de calculer tous les cofacteurs correspondants.