Les matrices - Propriétés du déterminant (1)

Notes rédigées par Laurent Zimmermann

Résumé Trois propriétés de base du déterminant sont expliquées. Nous considérons les propriétés du déterminant en rapport avec les opérations de transposition matricielle et de permutation de lignes ou de colonne. De même, nous expliquons pourquoi une matrice dont deux lignes (colonnes) sont proportionnelles ont un déterminant nul.

L'essentiel

- La matrice *transposée* $(\mathbf{A}^{\mathrm{t}})$ d'une matrice donnée $(\mathbf{A})$ s'obtient en permutant ses éléments symétriquement par rapport à sa diagonale principale. Ainsi, la première ligne devient la première colonne et vice versa, et ainsi de suite.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  De manière générale, si

$$(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$$

  alors

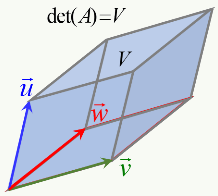
$$(\mathbf{A}^{\mathrm{t}})_{ij} = a_{ji}$$

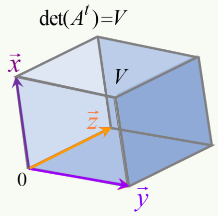
- Une matrice et sa transposée possèdent le même déterminant. Cette propriété résulte directement du fait que le déterminant peut se calculer en le développant indifféremment selon n'importe quelle ligne ou colonne.

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}) = \det(\mathbf{A})$$

- Ces deux déterminants, de même valeur, correspondent, selon leur ordre, aux aires, volumes ou hypervolumes de deux parallélogrammes, parallélépipèdes ou parallélotopes différents, construits soit sur les vecteurs colonnes de la matrice, soit sur ses vecteurs lignes de la même matrice **A**.

$$A = \begin{array}{ccc|c} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vec{x} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vec{y} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vec{z} \end{array} \qquad A^t = \begin{array}{ccc} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \hline a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}$$





- Si deux rangées parallèles d'une matrice sont permutées, le déterminant de la nouvelle matrice est l'opposé du déterminant de la matrice de départ (cette permutation entraîne un changement de signe du déterminant, mais pas de sa valeur absolue).

  Cette propriété découle des propriétés du produit mixte.

- Lorsque plusieurs permutations sont effectuées, le déterminant change plusieurs fois de signe. Ainsi, après n permutations de rangées parallèles le déterminant est multiplié par $(-1)^n$.

- Si deux rangées parallèles d'une matrice sont identiques ou multiples l'une de l'autre (proportionnelles l'une à l'autre), son déterminant est nul.

  Cette propriété résulte du fait que, dans le développement du déterminant, les mineurs 2×2 impliquant les deux rangées identiques sont tous nuls. (Si ces rangées ne sont pas les deux dernières, elles peuvent y être amenées par permutations.)

  Cette situation s'interprète géométriquement, par exemple à trois dimensions, en remarquant qu'il n'est pas possible de construire un parallélépipède sur trois vecteurs si deux d'entre eux sont confondus ou parallèles.