Les matrices - Propriétés du déterminant (2)

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Nous expliquons la propriété de linéarité d'un déterminant en une des ses lignes ou colonnes.

L'essentiel

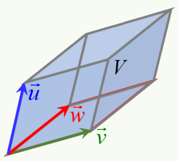
- Si tous les éléments d'*une seule* rangée d'un déterminant sont multipliés par une constante, alors la valeur de ce déterminant est aussi multipliée par cette constante.

  Pour rappel, une « rangée » peut être soit une « ligne », soit une « colonne ».

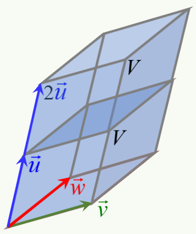
  En effet, puisque la valeur d'un déterminant peut être vue comme l'aire, le volume ou l'hypervolume de la figure géométrique construite sur les vecteurs définis par chaque rangée de ce déterminant, cette opération revient à multiplier l'un de ces vecteurs par cette constante et il en résulte que cette aire, ce volume ou cet hypervolume, c'est-à-dire la valeur de ce déterminant, est aussi multiplié par cette constante.

  Cette propriété de proportionnalité est la propriété de *linéarité du déterminant en une de ses rangées*. Elle résulte de la propriété de distributivité du produit scalaire par rapport à la loi d'addition.

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = V$$



$$\det(A') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = 2V$$



- En conséquence, si une matrice $\mathbf{A}$ de rang N est multipliée par un scalaire α, les N rangées sont multipliées par α et dès lors $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^N \det(\mathbf{A})$.
  Ce résultat indique que, en toute généralité, $\det(\alpha\mathbf{A}) \neq \alpha \det(\mathbf{A})$.

  🤔 Cette propriété pourrait paraître contre-intuitive ; il est donc d'autant plus important de l'avoir à l'esprit !

- En particulier (avec $\alpha = 2$),

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{A}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A})$$

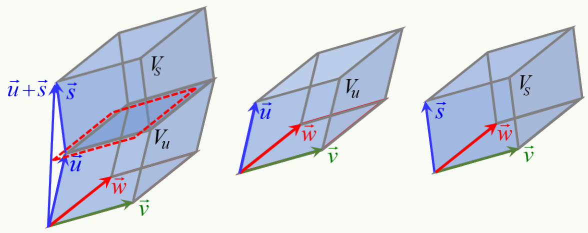
et *a fortiori*, pour deux matrices, différentes

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$$

🤔 Le déterminant d'une somme de matrices n'est donc pas égal à la somme de leurs déterminants (sauf cas particuliers : matrices 1×1, matrices nulles ...)

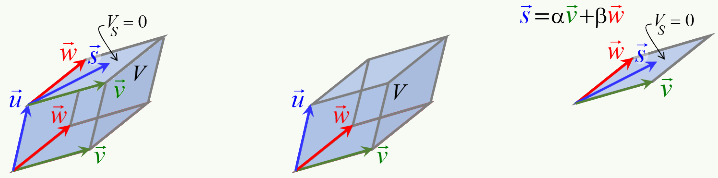
- Si des termes sont ajoutés dans une seule rangée d'un déterminant donné, alors le déterminant modifié est la somme du déterminant de départ et d'un nouveau déterminant, obtenu à partir du déterminant modifié en n'y conservant, dans la rangée modifiée, que les termes ajoutés.
Cette propriété se comprend intuitivement à 3 dimensions grâce à l'interprétation d'un déterminant en tant que volume d'un parallélépipède.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\overbrace{\vec{u}+\vec{s}} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array} + \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{s} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a'_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a'_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array}$$



- Si les termes ajoutés dans cette rangée sont les éléments d'une ou de plusieurs rangées parallèles, ou en sont une combinaison linéaire, alors le déterminant de départ *n'est pas modifié* : l'opération revient à lui additionner un ou des nouveaux déterminants ayant deux rangées parallèles égales ou multiples l'une de l'autre et qui sont donc nuls.
Cette propriété aussi se comprend intuitivement à 3 dimensions grâce à l'interprétation d'un déterminant en tant que volume d'un parallélépipède : le schéma montre effectivement que $\vec{s}$, combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$, est coplanaire avec eux et que le volume construit sur ces trois vecteurs est nul.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\overbrace{\vec{u}+\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12}+\beta a_{13} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+\alpha a_{22}+\beta a_{23} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+\alpha a_{32}+\beta a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array} + \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\vec{s}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w} & \vec{v} & \vec{w}\end{array}\\ \begin{vmatrix} \alpha a_{12}+\beta a_{13} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha a_{22}+\beta a_{23} & a_{22} & a_{23}\\ \alpha a_{32}+\beta a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\end{array}$$



- Ainsi, la valeur d'un déterminant ne change pas si l'une de ses rangées est modifiée par l'ajout d'une combinaison linéaire de rangées parallèles.

- L'interprétation du déterminant en tant que produit mixte et la formule du déterminant permettent de montrer que cette propriété, exposée et illustrée géométriquement à 3 dimensions, reste valable à un nombre N quelconque de dimensions.

$$(\vec{u}+\vec{s})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})+\vec{s}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

$$\det(A')=\det(A_u)+\det(A_s)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{i1}+a'_{i1})C_{i1}=\sum_{i=1}^{N}a_{i1}C_{i1}+\sum_{i=1}^{N}a'_{i1}C_{i1}$$

- Cette propriété remarquable peut être exploitée pour simplifier le calcul des déterminants. En effet, ajouter à une rangée une combinaison linéaire d'autres rangées judicieusement choisie peut y faire apparaître des zéros, dont la présence simplifie fortement les calculs.

- Un exemple détaillé est donné à la fin de la vidéo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \overset{L'_1=L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \overset{C'_3=C_3-2C_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$