Les matrices - Inversion matricielle

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Sur base d'une interprétation géométrique de l'algèbre matricielle, nous établissons la formule générale de l'inversion matricielle.

L'essentiel

- Rechercher l'inverse d'une matrice $\mathbf{A}$ c'est rechercher une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ telle que

  $$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

  Comme le produit matriciel s'effectue par produit scalaire des lignes de la première matrice par les colonnes de la seconde matrice, il est commode d'écrire la matrice $\mathbf{A}$ en termes de vecteurs colonnes et la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ en termes de vecteur lignes, comme suit :

  $$\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\vec{U}\\ \vec{V}\\ \vec{W}\end{matrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{pmatrix}}_{A^{-1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pour obtenir les zéro de la matrice identité il faut donc que
  - ▷ $\vec{U} \cdot \vec{v} = \vec{U} \cdot \vec{w} = 0$;
  - ▷ $\vec{V} \cdot \vec{w} = \vec{V} \cdot \vec{u} = 0$;
  - ▷ $\vec{W} \cdot \vec{u} = \vec{W} \cdot \vec{v} = 0$.

  Ceci s'obtient naturellement si les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ sont définis comme suit :
  - ▷ $\vec{U} = \vec{v} \times \vec{w}$ (donc perpendiculaire à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$) ;
  - ▷ $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{u}$ (donc perpendiculaire à la fois à $\vec{w}$ et à $\vec{u}$) ;
  - ▷ $\vec{W} = \vec{u} \times \vec{v}$ (donc perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$).
- Mais dans ce cas les éléments diagonaux valent
  - ▷ $\vec{U} \cdot \vec{u} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \det(\mathbf{A})$;
  - ▷ $\vec{V} \cdot \vec{v} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\mathbf{A})$;
  - ▷ $\vec{W} \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\mathbf{A})$.

  L'obtention de la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ nécessitera donc une division par $\det(\mathbf{A})$ de la matrice faite des vecteurs lignes $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$.

- Les trois vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ étant les produits vectoriels des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ définis plus haut, leurs composantes sont les cofacteurs correspondants de la matrice $\mathbf{A}$.
  Il s'avère dès lors utile de définir une nouvelle matrice, la matrice $\mathbf{C_A}$ des cofacteurs de la matrice $\mathbf{A}$, qui est déduite de cette dernière en y remplaçant chaque élément par son cofacteur.
  Il s'y retrouvent, disposés en colonnes cette fois, les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$:

$$A = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \qquad C_A = \begin{pmatrix} U_x & V_x & W_x \\ U_y & V_y & W_y \\ U_z & V_z & W_z \end{pmatrix}$$

- Sa transposée $\mathbf{C_A^t}$ (symétrie par rapport à la diagonale) n'est autre que la matrice des vecteurs lignes $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$, qu'il fallait encore diviser par $\det(\mathbf{A})$ pour obtenir $\mathbf{A}^{-1}$.
- En conclusion, l'inverse d'une matrice $\mathbf{A}$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de $\mathbf{A}$ divisée par le déterminant de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{C_A^t}$$

- Cette formule, exposée et illustrée géométriquement à 3 dimensions, reste valable à un nombre N quelconque de dimensions.
- À remarquer que, même si le produit matriciel n'est en général pas commutatif, l'inverse d'une matrice est son inverse aussi bien à gauche qu'à droite :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$$

- Un exemple détaillé est donné à la fin de la vidéo, avec sa vérification.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C_A^t \qquad \det(A) = 1 \times (2-0) + 2 \times (3-0) = 8$$

$$C_A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_A^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$