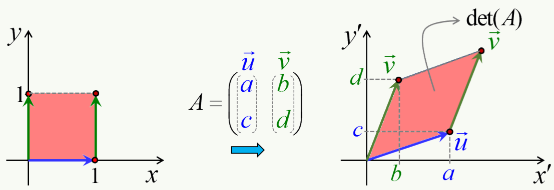
# Les matrices - Déterminant d'un produit de matrices

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

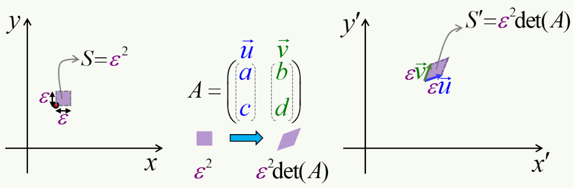
**Résumé** Sur base de l'interprétation géométrique du déterminant nous expliquons la propriété des déterminants qui dit que le déterminant du produit de deux matrices et égal au produit du déterminant de ces deux matrices.

## L'essentiel

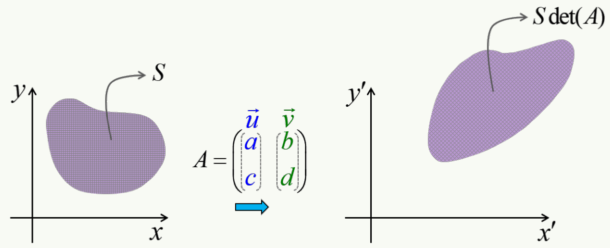
- Une matrice $2 \times 2$ peut être vue comme une transformation du plan. Sous une telle transformation, les deux vecteurs unitaires de base $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$ se transforment en des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les coordonnées apparaissent en colonnes dans la matrice de transformation.
  Un carré construit sur $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$ devient un parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le déterminant de la matrice est le facteur par lequel l'aire du carré est multipliée pour donner l'aire du parallélogramme.



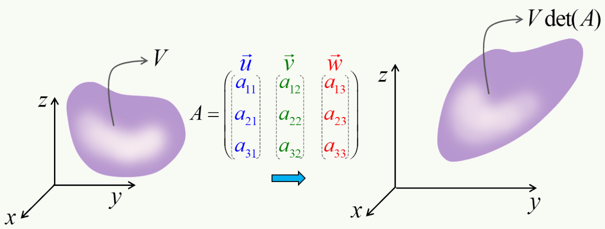

- De même, un carré de côté infinitésimal $\varepsilon$ localisé n'importe où dans le plan (dont les côtés sont parallèles au carré précédent) devient un parallélogramme infinitésimal lui aussi (et dont les côtés sont aussi parallèles au parallélogramme précédent).
  Ici également , le déterminant de la matrice est le facteur par lequel l'aire du carré est multipliée pour donner l'aire du parallélogramme.



- De telles surfaces infinitésimales permettent de construire n'importe quelle surface de grande taille de forme quelconque ; le déterminant reste ici encore le facteur par lequel l'aire de la surface est modifiée par la transformation.



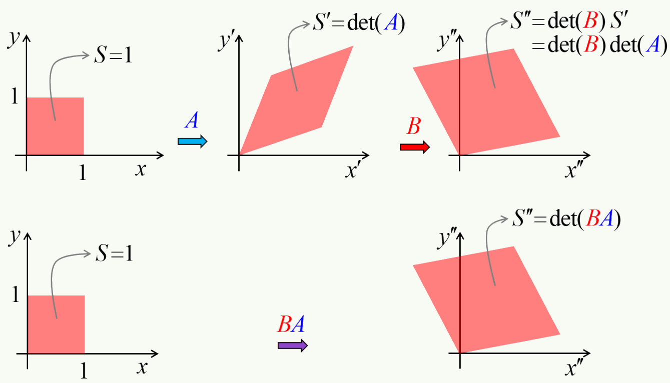

- Dans tous les cas de figure, le déterminant d'une matrice qui représente une transformation du plan est le facteur par lequel l'aire d'une surface quelconque est multipliée sous l'effet de cette transformation.
- Ce résultat se généralise à 3, 4, ... dimensions, auxquels cas le déterminant multiplie des volumes ou des hypervolumes.




- La succession de deux transformations, d'abord celle associée à une matrice **A** puis celle associée à une matrice **B**, est équivalente à une seule transformation, associée à la matrice produit **BA**.
  Selon l'approche adoptée, il apparaît que l'aire de départ est
  - ▷ soit multipliée successivement par $\det(\mathbf{A})$ puis par $\det(\mathbf{B})$, c'est-à-dire *in fine* par le produit $\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A})$
  - ▷ soit multipliée une seule fois par $\det(\mathbf{BA})$

  Ces deux approches étant équivalentes, il résulte nécessairement que

$$\det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A})$$



- Si la seconde transformation est la réciproque de la première, alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ n'est autre que la matrice identité $\mathbf{I}$. L'aire de surface de départ n'étant dès lors pas modifiée, il résulte que pour toute matrice $\mathbf{A}$ inversible (à déterminant non nul)

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = [\det(\mathbf{A})]^{-1}$$