Les matrices - Addition

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Nous présentons et analysons la loi d'addition pour les matrices, en particulier nous passons en revue ses propriétés de distributivité, d'associativité et de commutativité.

Introduction

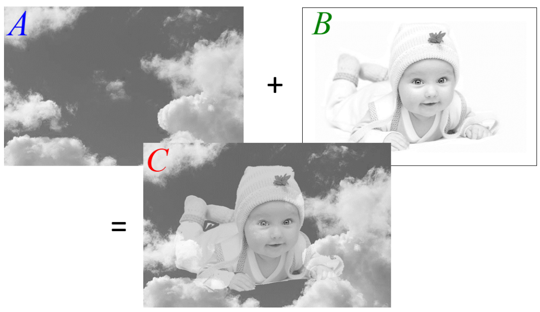
Ces notes font suite à celles sur l'introduction aux matrices[1]. Nous aborderons les règles de base du calcul matriciel, en commençant par l'addition de matrices. Nous profiterons de la simplicité de l'opération d'addition matricielle pour introduire des notations peut-être abstraites, mais très utiles pour aller plus loin dans l'étude des matrices, notamment pour obtenir la formule du produit matriciel.

Illustration

Une image numérique est codée par un ensemble de nombres qui donnent une information sur l'intensité lumineuse d'un point — pixel — de l'image (nous envisageons ici le cas simple d'une image monochrome). Les matrices constituent des outils mathématiques idéaux pour représenter de telles images. Créer un effet de fondu, qui consiste à superposer deux images, reviendra tout simplement à additionner les matrices correspondant à ces images.

Par exemple, à partir de deux images qui sont représentées par les matrices **A** et **B**, nous obtiendrons la matrice **C** qui correspondra à l'image résultant de leur fondu par la simple somme

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$



Rappels

Dans la suite, nous utiliserons plusieurs notions expliquées dans l'introduction aux matrices. Rappelons ici quelques-unes d'entre elles qui seront utilisées dans la suite de cette séquence.

1. Voir https://clipedia.be/videos/les-matrices-introduction

Dimensions d'une matrice - Produit entre matrices

Nous avons vu qu'un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut être exprimé sous forme matricielle

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Nous avons évoqué la dimension d'une matrice : il s'agit du nombre de lignes et de colonnes qu'elle possède. La convention est de les spécifier toujours dans cet ordre sous la forme d'une multiplication (avec un signe $\times$).
Par exemple, la première matrice ci-dessus est une matrice « deux fois deux » (matrice carrée) et la dernière est une matrice « deux fois une » (matrice colonne).

L'impératif de pouvoir reconstituer le système d'équations à partir de la notation matricielle nous a fait découvrir que le produit de deux matrices est une nouvelle matrice dont chaque élément est calculé comme le produit scalaire entre un vecteur ligne pris dans la première matrice et un vecteur colonne pris dans la seconde matrice, la ligne et la colonne à considérer étant celles de l'élément de la nouvelle matrice que l'on calcule.

Produit entre un scalaire et une matrice

Nous avons encore vu que le produit entre un scalaire et une matrice colonne ou une matrice carrée s'obtient en multipliant tous les éléments de cette matrice par ce scalaire.

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \qquad \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

$2\times$  $=$ 

Une application en est la multiplication par 2 d'une image (plus exactement d'une matrice qui représente une image). Cela revient à rendre l'image plus lumineuse.

Addition de matrices

Commençons par multiplier une matrice par 2. Nous savons comment effectuer cette multiplication (voir rappels ci-dessus) :

$$2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Mais multiplier une matrice par 2 revient à l'additionner à elle-même. Le membre de gauche peut donc être réécrit sous la forme d'une somme de matrices. Et dans le membre de droite, chaque élément de matrice est le double d'un nombre, c'est-à-dire ce nombre additionné à lui-même. Nous pouvons donc réécrire les deux membres de l'égalité :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a & b+b \\ c+c & d+d \end{pmatrix}$$

Ce résultat nous révèle la règle d'addition des matrices. La somme de deux matrices est une nouvelle matrice dont chaque élément est égal à la somme des deux éléments correspondants dans ces deux matrices. Le mot « correspondant » signifie que l'on considère la même position (ligne, colonne) à la fois dans les matrices qui sont additionnées et dans la matrice résultat.

Nous généraliserons cette loi à l'addition de matrices différentes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Cette loi d'addition entraîne que la somme de matrices de dimensions différentes n'a pas de sens : il n'existe plus de correspondance possible entre les matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$$

Il n'est donc possible d'additionner des matrices que si elles ont la même dimension. Et, bien entendu, la dimension de la matrice résultat sera identique à la dimension commune des matrices qui sont additionnées.

Matrice nulle

À présent, examinons la somme de deux matrices, la seconde ayant tous ses éléments opposés (changés de signe) aux éléments correspondants de la première. En application de la règle d'addition qui vient d'être vue, nous trouvons que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que le résultat est bien une matrice, une matrice nulle, et pas simplement le nombre 0. Cette matrice nulle est de dimension 2×2. Elle sera représentée par le symbole $\mathbf{0}$, différent du chiffre 0, ou parfois par le symbole $\mathbf{0}_2$ pour rappeler sa dimension.

La représentation, dans le domaine de l'imagerie numérique, d'une matrice nulle serait une image… noire.

La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition matricielle.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Ainsi, étonnamment, la somme d'une image quelconque avec une image noire redonne l'image de départ, et pas une image toute noire !

Opposé d'une matrice

En nous souvenant de la règle de multiplication d'une matrice par un scalaire, nous nous rendons bien compte que nous pouvons écrire

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ainsi, la somme considérée au début de la section précédente revient à la somme suivante :

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Cette matrice $-\mathbf{A}$ est donc l'opposé de la matrice $\mathbf{A}$, puisque leur somme donne la matrice nulle, tout comme la somme d'un nombre et de son opposé donne zéro.

Soustraction de matrices

Bien entendu, la dernière expression pouvait aussi s'écrire

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

où nous voyons apparaître la différence entre deux matrices.

Ici il s'agissait de la différence entre une matrice et elle-même, dont le résultat est la matrice nulle. Nous généraliserons cette opération entre deux matrices distinctes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

Distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition de matrices

La distributivité de la multiplication sur l'addition en algèbre des nombres est une propriété très pratique souvent utilisée :

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

S'applique-t-elle également en algèbre des matrices ? Pouvons-nous écrire

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \stackrel{?}{=} \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

Pour répondre à cette question, développons le membre de gauche en faisant apparaître les éléments de chacune des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$:

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]$$

Effectuons la somme en appliquant la loi d'addition des matrices (additionner les éléments correspondants). Il n'est plus nécessaire d'écrire les crochets [ ]. Nous obtenons :

$$\alpha\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Nous nous trouvons devant la multiplication d'une matrice par un scalaire. Nous avons vu comment l'effectuer (multiplier tous les éléments). Puis, en distribuant la multiplication sur l'addition des scalaire nous arrivons à :

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \alpha e & \alpha b + \alpha f \\ \alpha c + \alpha g & \alpha d + \alpha h \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut être vue comme la somme de deux matrices, soit :

$$\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{pmatrix}$$

Enfin, nous pouvons mettre α en évidence devant chaque matrice (opération réciproque de la multiplication par un scalaire) pour obtenir le résultat final où nous reconnaissons les matrices **A** et **B** multipliées par le scalaire α :

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

En comparant le début et la fin du développement, nous voyons que nous sommes parvenus à prouver que

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

La distributivité de la multiplication par un scalaire sur la loi d'addition de matrices est donc vérifiée.

Notation compacte des matrices

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les matrices de petites dimensions, au maximum 2×2, y compris dans les démonstrations. Celles-ci ne sont donc pas générales. Éviter cet écueil nécessite de recourir à une notation générale des matrices, valable quelle que soit leurs dimensions : la notation compacte des matrices. Elle a déjà été utilisée une fois, tout au début des notes sur l'introduction aux matrices.

Cette notation compacte repose sur quelques conventions.

1. La même lettre est utilisée pour symboliser une matrice et ses éléments, mais en majuscule pour la matrice et en minuscule pour ses éléments.
2. Chaque symbole d'élément porte deux indices qui correspondent le premier à la ligne et le second à la colonne où se situe cet élément.
3. La notation compacte consiste à représenter une matrice par la lettre minuscule représentant ses éléments, affectée de deux indices (le plus souvent i et j), le tout entre parenthèses.
4. Pour une matrice de dimension $m \times n$, le premier indice peut prendre toutes les valeurs entre 1 et m (nombre de lignes de la matrice), tandis que le second indice peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n (nombre de colonnes de la matrice).

Par exemple, pour une matrice 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad \begin{cases} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{cases}$$

Notons que les indices des éléments a se lisent « un, un », « un, deux », « deux, un », « deux, deux » (et pas « onze », « douze » etc. !)

- Le premier indice, i, vaut toujours 1 à la 1$^{\text{re}}$ ligne et 2 à la 2$^{\text{de}}$: $i = 1,2$
- Le second indice, j, vaut toujours 1 à la 1$^{\text{re}}$ colonne et 2 à la 2$^{\text{de}}$: $j = 1,2$

Pour une matrice de dimension $m \times n$, qui peut âr exemple représenter une image, la différence entre la notation explicite et la notation compacte devient absolument flagrante :

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

Exemples d'emploi de la notation compacte

Dans cette section, nous utilisons la notation compacte des matrices pour reprendre quelques démonstrations ou propriétés données précédemment dans le cas de matrices de petites dimensions, non seulement de façon à les généraliser à des matrices de dimensions quelconques, mais aussi afin d'illustrer l'utilisation de la notation compacte.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

L'expression $\alpha\mathbf{A}$ exprime le produit entre le scalaire α et la matrice $\mathbf{A}$, mais elle n'indique pas explicitement comment calculer les éléments de la matrice qui en résulte. Pour cela il aurait fallu utiliser la notation détaillée comme nous l'avons fait plus haut. Mais ce résultat, déjà assez long à écrire, même dans ce cas simple, n'est valable que pour des matrices 2×2. Et *quid* des matrices ayant d'autres dimensions ?

La notation compacte ci-dessous permet de rencontrer ces objections :

$$\alpha\mathbf{A} \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \alpha \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{des } a_{ij}}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\alpha a_{ij})}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{des } \alpha a_{ij}}}$$

les égalités successives s'expliquant comme suit :

1. traduction de $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}$ en notation compacte ;
2. expression de la règle de multiplication d'une matrice par un scalaire.

La dernière égalité signifie que chaque élément de la matrice résultat s'obtient en multipliant par α l'élément a_{ij} de la matrice $\mathbf{A}$ qui occupe la même ligne i et la même colonne j que l'élément que l'on calcule, et ce pour tout i et pour tout j :

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \qquad \begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots m \\ \forall j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

Addition de matrices

L'expression $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ exprime la somme des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, mais elle ne montre pas non plus explicitement comment calculer les éléments de la matrice résultat, alors que la notation développée utilisée précédemment le montrait. Encore une fois, celle-ci était lourde et particulière au cas de matrices 2×2.

À nouveau, la notation compacte qui suit permet de surmonter ces inconvénients :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij}+b_{ij})}_{\substack{\text{matrice des}\\ a_{ij}+b_{ij}}}$$

les égalités successives s'expliquant comme suit :

1. traduction de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ en notation compacte ;
2. expression de la règle d'addition de deux matrices.

La dernière égalité signifie que chaque élément de la matrice résultat s'obtient en additionnant les éléments a_{ij} de la matrice $\mathbf{A}$ et b_{ij} de la matrice $\mathbf{B}$ qui occupent la même ligne i et la même colonne j que l'élément que l'on calcule, et ce pour tout i et pour tout j :

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i=1,2,\ldots m \\ \forall j=1,2,\ldots n \end{array} \right.$$

Bien entendu, il faut se rappeler que que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ doivent avoir les mêmes dimensions $(m\times n)$ et que, par définition de la loi d'addition, la matrice résultat $\mathbf{A}$ a également les dimensions $(m\times n)$.

Distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition de matrices

Jusqu'ici nous n'avons utilisé la notation compacte que pour exprimer des lois de calcul. Illustrons à présent son utilisation dans une démonstration, en l'occurrence pour démontrer que la multiplication scalaire peut être distribuée sur l'addition de matrices. Pour cela, calculons les éléments de $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ en utilisant la notation compacte.

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &\overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \alpha\Big[\underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}}\Big] \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \alpha\Big[\underbrace{(a_{ij}+b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}+b_{ij}}}\Big] \\ &\overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\alpha[a_{ij}+b_{ij}])}_{\substack{\text{matrice des}\\ \alpha[a_{ij}+b_{ij}]}} \overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij})}_{\substack{\text{matrice des}\\ \alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}}} \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} \alpha\underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \alpha\underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} \overset{\overset{6}{\downarrow}}{=} \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}\end{aligned}$$

Les différentes étapes de la démonstration se justifient comme suit :

1. traduction en notation compacte ;
2. application de la loi d'addition de deux matrices (effectuer la somme) ;
3. application de la loi du produit d'un scalaire et d'une matrice (les crochets sont devenus inutiles) ;
4. application de la loi de distributivité de la multiplication sur l'addition entre scalaires (il ne s'agit plus de matrices !) ;
5. application de la loi d'addition de deux matrices (décomposer en une somme) ;
6. retour à la notation symbolique.

En comparant la première expression de cette chaîne d'égalités avec la dernière :

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

nous pouvons conclure que nous avons bien démontré que la multiplication par un scalaire peut être distribuée sur l'addition de matrices, mais cette fois de manière tout à fait générale, et non plus dans le cas de matrices 2×2 seulement.

Associativité de l'addition de matrices

Démontrons à présent que l'addition de matrices est associative, c'est-à-dire que l'addition de trois matrices peut se faire indifféremment (le résultat final est le même) soit en additionnant d'abord les deux premières entre elles puis en additionnant la troisième, soit en additionnant d'abord les deux dernières entre elles puis en additionnant la première. Pour cela vérifions si l'égalité suivante est vraie :

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}] + \mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A} + [\mathbf{B}+\mathbf{C}]$$

Nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}+\mathbf{B}] + \mathbf{C} &\overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \Big[\, \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} \,\Big] + \underbrace{(c_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } c_{ij}}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij}+b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}+b_{ij}}} + \underbrace{(c_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } c_{ij}}} \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})}_{\substack{\text{matrice des}\\ a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}}} \\
&\overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \underbrace{(b_{ij}+c_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}+c_{ij}}} \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \Big[\, \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} + \underbrace{(c_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } c_{ij}}} \,\Big] \overset{\overset{6}{\downarrow}}{=} \mathbf{A} + [\mathbf{B}+\mathbf{C}]
\end{aligned}$$

Les différentes étapes du calcul se justifient de la manière suivante :

1. traduction en notation compacte ;
2. application de la loi d'addition des matrices (effectuer la 1re somme, les crochets sont devenus inutiles) ;
3. application de la loi d'addition des matrices (effectuer la 2e somme) ;
4. application de la loi d'addition des matrices (décomposer en une somme) ;
5. application de la loi d'addition des matrices (décomposer en une somme) ;
6. retour à la notation symbolique.

En comparant la première expression de cette chaîne d'égalités avec la dernière :

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}] + \mathbf{C} = \mathbf{A} + [\mathbf{B}+\mathbf{C}]$$

nous pouvons conclure que nous avons bien démontré de manière générale que l'addition matricielle est associative.

Commutativité de l'addition des matrices

Démontrons enfin que l'addition de matrices est commutative, c'est-à-dire que le résultat ne change pas si l'on intervertit les deux termes d'une somme, en vérifiant si

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \stackrel{?}{=} \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Nous pouvons écrire successivement :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} + \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ij}+b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}+b_{ij}}} \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} \underbrace{(b_{ij}+a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}+a_{ij}}} \overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} \underbrace{(b_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } b_{ij}}} + \underbrace{(a_{ij})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ij}}} \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Les justifications des différentes étapes sont les suivantes :

1. passage à la notation compacte des matrices ;
2. application de la loi d'addition des matrices (effectuer la somme) ;
3. application de la commutativité de la somme de scalaires ;
4. application de la loi d'addition des matrices (décomposer en une somme) ;
5. retour à la notation symbolique.

En comparant la première expression de cette chaîne d'égalités avec la dernière :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

nous pouvons conclure que nous avons bien démontré de manière générale que l'addition matricielle est commutative.

L'essentiel

- Un usage consacré est de noter par a les éléments d'une matrice $\mathbf{A}$ (la même lettre, majuscule pour la matrice, minuscule pour ses éléments).
- Chaque symbole d'un élément prend deux indices, i et j, qui désignent respectivement le numéro de la ligne et le numéro de la colonne où se trouve cet élément.
- La notation compacte d'une matrice consiste à écrire la lettre minuscule représentant ses éléments, affectée des deux indices de ligne et de colonne (le plus souvent i et j), le tout entre parenthèses :

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij}) \qquad \left\{\begin{array}{l} i=1,2,\dots m\\ j=1,2,\dots n\end{array}\right.$$

- Le produit entre un scalaire et une matrice est une nouvelle matrice de mêmes dimensions dont chaque élément est égal au produit entre ce scalaire et l'élément correspondant dans la première matrice, c'est-à-dire de l'élément qui se trouve à la même position (ligne, colonne) dans cette matrice :

$$\alpha\mathbf{A}=\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall i=1,2,\dots m\\ \forall j=1,2,\dots n\end{array}\right.$$

- La somme ou la différence de deux matrices de mêmes dimensions est une nouvelle matrice de mêmes dimensions dont chaque élément est égal à la somme ou à la différence des deux éléments correspondants dans ces deux matrices, c'est-à-dire des éléments qui se trouvent à la même position (ligne, colonne) à la fois dans les matrices qui sont additionnées ou soustraites et dans la matrice résultat :

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}) \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, \ldots m \\ \forall j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

- La matrice nulle de dimension $m \times n$ est la matrice dont tous les éléments valent zéro.
- L'opposé d'une matrice est une matrice de mêmes dimensions dont chaque élément est l'opposé de l'élément correspondant dans la première matrice, c'est-à-dire de l'élément qui se trouve à la même position (ligne, colonne) dans cette matrice :

$$-\mathbf{A} = -(a_{ij}) = (-a_{ij}) \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, \ldots m \\ \forall j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

- La multiplication scalaire est distributive sur l'addition de matrices :

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

- L'addition de matrices est associative :

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}] + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A} + [\mathbf{B} + \mathbf{C}]$$

- L'addition de matrices est commutative :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$