# Les matrices - Propriétés de la multiplication

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

**Résumé** L'objectif de cette séquence est de démontrer les propriétés de base du produit matriciel : la non-commutativité, la distributivité (par rapport à la loi d'addition des matrices) ainsi que l'associativité. La connaissance de ces démonstrations n'est pas indispensable à la maîtrise du calcul matriciel mais cette séquence est malgré tout conseillée car elle permet de se familiariser avec le formalisme matriciel.

## Quelques rappels

### Produit de deux matrices

Nous avons vu que la multiplication de deux matrices (**A** et **B**) quelconques n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Si c'est le cas, alors leur produit est une nouvelle matrice (**C**) qui possède le même nombre de lignes que la première et le même nombre de colonnes que la seconde :

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{l\times n}\underbrace{\mathbf{B}}_{n\times m}=\underbrace{\mathbf{C}}_{l\times m}$$

Ses éléments s'obtiennent par le produit scalaire d'une ligne de la première (**A**) et d'une colonne de la seconde (**B**), la ligne ($i$) et la colonne ($j$) à considérer étant celles de l'élément de la nouvelle matrice (**C**) que l'on calcule. Cette opération se résume par la formule

$$AB = C = \left(c_{ij}\right) \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; \dots \; a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & \dots & a_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

souvent énoncée par l'expression « $c_{ij}$ est la somme pour $k$ allant de 1 à $n$ des $a_{ik}$ $b_{kj}$. »

Le fait que le 2$^{\text{e}}$ indice de $a$ et le 1$^{\text{er}}$ indice de $b$ soit le même, $k$, indique qu'il s'agit bien de produits d'éléments homologues de la ligne et de la colonne en question et que leur somme est bien leur produit scalaire. Et chaque élément dans une rangée (ligne ou colonne) n'a son homologue dans l'autre rangée que si la condition énoncée en premier lieu ci-dessus est satisfaite.

# Cas particuliers de la multiplication

## Multiplication d'une matrice ligne et d'une matrice colonne

Nous envisageons ici une multiplication de type

$$(1 \times n) \cdot (n \times 1) \quad \rightarrow \quad (1 \times 1)$$

Dans ce cas, il n'y a qu'une seule ligne dans la première matrice et une seule colonne dans la seconde. Et tout comme une matrice à une seule colonne est nommée *vecteur colonne*, une matrice à une seule ligne est nommée *vecteur ligne*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (c_{11})$$

La matrice produit ne contient qu'un seul élément, $c_{11}$. Il n'y a qu'un seul produit scalaire à effectuer

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1}$$

Néanmoins le produit matriciel est bien une *matrice*, et non un *scalaire* ! Oublier cette subtilité mènerait vite à des incohérences : par exemple, la multiplication entre le scalaire $c_{11}$ et une matrice $\mathbf{A}$ (il suffit de distribuer la multiplication sur tous les éléments de la matrice, quelle que soient ses dimensions) n'a rien à voir avec le produit entre la matrice $(c_{11})$ et la matrice $\mathbf{A}$ (opération possible seulement si cette dernière ne possède qu'une seule ligne).

## Multiplication d'une matrice colonne et d'une matrice ligne

À présent, intervertissons les deux matrices. Nous envisageons donc maintenant une multiplication de type

$$(n \times 1) \cdot (1 \times n) \quad \rightarrow \quad (n \times n)$$

Ce n'est plus du tout le même résultat qu'auparavant.

La matrice produit possède à présent non plus un seul élément, mais elle en possède $n^2$ et il y aura autant de produits scalaires à effectuer.

En revanche, il n'y a qu'une seule colonne dans la première matrice et qu'une seule ligne dans la seconde et, de ce fait, les lignes de la 1^re^ matrice et les colonnes de la 2^de^ se réduisent à peu de choses, puisqu'elles ne contiennent qu'un seul élément. Chaque produit scalaire effectué pour calculer un élément $c_{ij}$ se réduit donc lui aussi à peu de choses puisqu'il ne compte qu'un seul terme (si nous écrivions une somme, ce serait une somme pour $k$ allant de 1 à ... 1) :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{1} b_{ik} a_{kj} = b_{i1} a_{1j}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ou encore, de manière tout à fait explicite :

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & \dots & b_{11}a_{1n} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & \dots & b_{21}a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1}a_{11} & b_{n1}a_{12} & \dots & b_{n1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

### Remarques

Dans les cas particuliers que nous venons d'envisager, la multiplication des deux matrices était possible dans un sens (**A B**) et dans l'autre (**B A**). Mais les produits résultants étaient des matrices totalement différentes. Ceci nous montre d'emblée que, en général, la multiplication des matrices n'est pas commutative. En général, car il est possible de trouver des matrices particulières dont le produit reste le même si elles sont interverties.

**Exemple** Pensons aux produits suivants dont l'égalité est facile à vérifier[a] :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Solution : dans les deux cas, le résultat est une matrice $2 \times 2$ dont tous les éléments valent douze.

**Rappel :** une opération ente deux entités (scalaires, vecteurs, matrices...) est commutative si l'interversion de ces entités ne modifie en rien le résultat de l'opération. Si l'interversion a pour conséquence soit que le résultat change, soit que l'opération qui était possible devient impossible ou vice-versa, alors l'opération n'est pas commutative.

## Non-commutativité de la multiplication de matrices

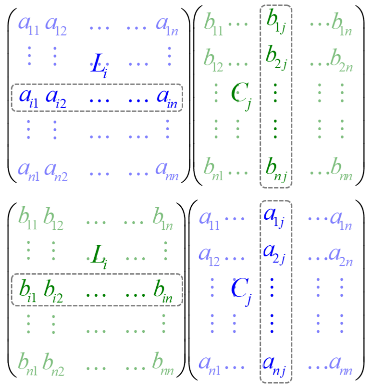
Montrons que la multiplication de deux matrices n'est pas commutative en général.

Pour cela, envisageons une multiplication possible entre deux matrices **A** et **B** et désignons leur produit par **C** :

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{l\times n}\underbrace{\mathbf{B}}_{n\times m} = \underbrace{\mathbf{C}}_{l\times m}$$

Si nous intervertissons les deux matrices, la nouvelle multiplication est

$$\underbrace{\mathbf{B}}_{n\times m}\underbrace{\mathbf{A}}_{l\times n} = \underbrace{\mathbf{C}}_{n\times n}$$



Nous voyons non seulement que la multiplication n'est possible que si $m = l$, mais aussi que le résultat est une matrice de mêmes dimensions que précédemment seulement si $l = n$ et $m = n$. Pour que les deux multiplications soient permises, il faut donc que les deux matrices **A** et **B** soient carrées et de mêmes dimensions ($l = m = n$), ce qui n'est pas un cas général.

Néanmoins, même si les deux multiplications sont possibles, rien ne garantit que les deux produits seront égaux. En effet, intervertir les deux matrices revient, pour chaque élément du résultat, à changer le produit scalaire entre une *ligne* de **A** et une *colonne* de **B** par le produit scalaire entre une *colonne* de **A** et une *ligne* de **B**. Or, dans la matrice **A**, il n'y a aucune raison pour que les éléments d'une quelconque de ses lignes $L_i$ et d'une quelconque de ses colonnes $C_j$ soient les mêmes. On ne peut donc pas prendre les éléments de l'une pour ceux de l'autre. Et il n'y a pas davantage de raison de pouvoir le faire avec la matrice **B**.

Par conséquent, les produits des deux matrices dans un sens et dans l'autre, bien que possibles, donnent des résultats différents. Leur multiplication n'est donc pas commutative.

> **Exemple** Voici deux matrices qui peuvent être multipliées dans un sens et dans l'autre, mais dont les produits sont différents.
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Distributivité de la multiplication matricielle sur l'addition matricielle

Demandons-nous si la multiplication par une matrice peut être distribuée sur une addition de deux matrices et si nous avons le droit d'écrire

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \stackrel{?}{=} \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C}$$

Pour ce faire, commençons par développer le membre de gauche en utilisant la notation compacte, puis appliquons quelques propriétés connues des matrices. Nous obtenons successivement[1] :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &\overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ik})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ik}}}\ \underbrace{[(b_{kj})+(c_{kj})]}_{\substack{\text{somme des matrices}\\ (b_{kj}) \text{ et } (c_{kj})}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{ik})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ik}}}\ \underbrace{(b_{kj}+c_{kj})}_{\substack{\text{matrice somme}\\ \text{des } b_{kj}+c_{kj}}} \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\Sigma a_{ik}[b_{kj}+c_{kj}])}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{résultante}}} \\ &\overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\Sigma a_{ik}b_{kj} + \Sigma a_{ik}c_{kj})}_{\substack{\text{matrice résultante où les}\\ \text{termes ont été réarrangés}}} \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\Sigma a_{ik}b_{kj})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ik}b_{kj}}} + \underbrace{(\Sigma a_{ik}c_{kj})}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{des } a_{ik}c_{kj}}} \overset{\overset{6}{\downarrow}}{=} \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} \end{aligned}$$

1. Afin de ne pas surcharger les équations, nous décidons d'écrire les symboles sommatoires $\Sigma$ tout seuls, en omettant de mentionner que les sommes s'effectuent en prenant toutes les valeurs de $k$ comprises entre 1 et $n$.

Les différentes étapes du raisonnement se justifient comme suit :

1. passage à la notation compacte.
   Attention ! Comme nous sommes sur le point de multiplier des matrices entre elles, nous nous attendons à devoir calculer des « sommes des $a_{ik}b_{kj}$ » et des « sommes des $a_{ik}c_{kj}$ », expressions dans lesquelles trois indices sont utilisés ($i$, $j$ et $k$). Afin de nous y préparer nous utilisons déjà les indices $i$ et $k$ pour les éléments de **A** et les indices $k$ et $j$ pour les éléments à la fois de **B** et de **C** car ils seront tous multipliés avec les $a_{ik}$ ;

2. application de la loi d'addition des matrices (effectuer la somme) ;

3. application de la loi de multiplication des matrices (effectuer le produit) ;

4. application de la distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition de scalaires et groupement des termes en $b$ et en $c$ ;

5. application de la loi d'addition des matrices (décomposer en une somme) ;

6. retour à la notation symbolique.

## Associativité de la multiplication matricielle

Poursuivons en nous intéressant à la multiplication de trois matrices. Pour calculer le produit, nous pouvons soit commencer par multiplier les deux premières entre elles et terminer en multipliant le résultat par la troisième, soit commencer par multiplier les deux dernières entre elles et terminer en multipliant la première par ce résultat. Obtenons-nous le même résultat final dans les deux cas ?

$$[\mathbf{AB}]\mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A}[\mathbf{BC}]$$

Développons le membre de gauche et voyons si les lois du calcul matriciel que nous connaissons nous permettent d'écrire le résultat sous la forme du membre de droite. À noter que nous utilisons ici les notations abrégées $\Sigma_l \ldots$ et $\Sigma_k \ldots$ au lieu des notations complètes et explicites $\sum_{k=1}^{m} \ldots$ et $\sum_{l=1}^{n} \ldots$ afin d'alléger quelque peu l'écriture [2].

2. Notons que, dans la vidéo, le développement présente une situation où les deux indices $k$ et $l$ vont jusqu'à la même valeur $n$. Le développement présenté ici est plus général et, dans l'écriture, cela ne tient que dans la différenciation de deux lettres (un des $n$ de la vidéo est devenu $m$ ici). Mais bien entendu il ne suffit pas de changer une lettre en une autre pour généraliser ; encore faut-il que cela ait du sens et soit cohérent. Nous devons donc nous rendre compte à quel point ce genre de développement peut être subtil et, du coup, être particulièrement attentifs : chaque caractère a son importance.

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{AB}]\mathbf{C} &\overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \underbrace{[\ \overbrace{(a_{il})(b_{lk})}^{\substack{\text{multiplication}\\ \text{à effectuer en}\\ \text{premier lieu}}}\ ](c_{kj})}_{\substack{\text{multiplication}\\ \text{à effectuer en}\\ \text{second lieu}}} \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} \underbrace{(\Sigma_l a_{il} b_{lk})}_{\substack{\text{matrice des}\\ [\mathbf{AB}]_{ik}}}(c_{kj}) \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} (\Sigma_k[\ \underbrace{[\Sigma_l a_{il} b_{lk}]}_{\substack{\text{élément } [\mathbf{AB}]_{ik}\\ \text{du produit } \mathbf{AB}}}\ \ c_{kj}])\\
&\overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} (\Sigma_k[\Sigma_l a_{il} b_{lk} c_{kj}]) \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} (\Sigma_l[\Sigma_k a_{il} b_{lk} c_{kj}])\\
&\overset{\overset{6}{\downarrow}}{=} (\Sigma_l[a_{il}\ \ \underbrace{[\Sigma_k b_{lk} c_{kj}]}_{\substack{\text{élément } [\mathbf{BC}]_{lj}\\ \text{du produit } \mathbf{BC}}}\ ]) \overset{\overset{7}{\downarrow}}{=} (a_{il})\underbrace{(\Sigma_k b_{lk} c_{kj})}_{\substack{\text{matrice des}\\ [\mathbf{BC}]_{lj}}} \overset{\overset{8}{\downarrow}}{=} \underbrace{(a_{il})[\ \overbrace{(b_{lk})(c_{kj})}^{\substack{\text{multiplication}\\ \text{à effectuer en}\\ \text{premier lieu}}}\ ]}_{\substack{\text{multiplication}\\ \text{à effectuer en}\\ \text{second lieu}}} \overset{\overset{9}{\downarrow}}{=} \mathbf{A}[\mathbf{BC}]
\end{aligned}
$$

Les étapes successives se justifient comme suit :

1. passage à la notation compacte et les deux premières matrices sont multipliées en premier lieu ;
2. application de la loi de multiplication des matrices (effectuer la première multiplication) ;
3. application de la loi de multiplication des matrices (effectuer la deuxième multiplication) ;
4. distribution du facteur $c_{kl}$ sur tous les termes de la somme $\Sigma_l$ ;
5. application de la loi de commutativité de la somme de scalaires (passer d'une addition où les termes sont pris dans l'ordre des $k$ et pour chaque $k$ dans l'ordre des $l$ à une addition où les termes sont pris dans l'ordre des $l$ et pour chaque $l$ dans l'ordre des $k$) ; par exemple, si les matrices **A**, **B** et **C** sont $3 \times 3$, les additions sont effectuées comme suit avant et après le réarrangement, mais les deux sommes sont identiques :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_k[\Sigma_l a_{il} b_{lk} c_{kj}] &= a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + a_{i3}b_{31}c_{1j}\\
&+ a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + a_{i3}b_{32}c_{2j}\\
&+ a_{i1}b_{13}c_{3j} + a_{i2}b_{23}c_{3j} + a_{i3}b_{33}c_{3j}\\
\Sigma_l[\Sigma_k a_{il} b_{lk} c_{kj}] &= a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i1}b_{13}c_{3j}\\
&+ a_{i2}b_{21}c_{1j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + a_{i2}b_{23}c_{3j}\\
&+ a_{i3}b_{31}c_{1j} + a_{i3}b_{32}c_{2j} + a_{i3}b_{33}c_{3j}
\end{aligned}
$$

6. application de la loi de distributivité de la multiplication sur l'addition pour les scalaires (mettre en évidence $a_{il}$ qui est un facteur commun pour toutes les valeurs de $k$) ;
7. application de la loi de multiplication des matrices (reconnaître la multiplication des matrices des $(b_{lk})$ et des $(c_{kj})$) ;
8. application de la loi de multiplication des matrices (reconnaître la multiplication de la matrice des $(a_{il})$ avec le produit précédent) ;
9. retour à la notation symbolique.

### L'essentiel

- Une matrice $1 \times 1$ ne peut en aucun cas être considérée comme un scalaire.

$$(a) \neq a$$

- La multiplication de deux matrices n'est *en général* pas commutative (en général, intervertir les deux matrices conduit à un résultat différent ou rend l'opération impossible).

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$$

- Il existe néanmoins des *cas particuliers* où la multiplication est commutative, on dit dans ce cas que les deux matrices commutent.
- La multiplication matricielle est distributive sur l'addition matricielle.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C}$$

- La multiplication de matrices est associative.

$$[\mathbf{AB}]\mathbf{C} = \mathbf{A}[\mathbf{BC}]$$