# Les matrices - La matrice identité

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

**Résumé** Sur base de la formule de l'inverse d'une matrice $(2 \times 2)$ nous montrons que le produit d'une matrice avec son inverse donne la matrice identité $(2 \times 2)$ . Nous montrons que cette matrice constitue l'élément neutre de l'opération de multiplication matricielle. À l'aide de la formule du produit de deux matrices de dimensions quelconques, nous généralisons le concept de matrice identité à l'ordre $(n \times n)$.

## Quelques rappels

Dans l'introduction au calcul matriciel, nous avons écrit un système de deux équations linéaires à deux inconnues sous forme matricielle. Dans ce formalisme, le système a pu se noter de manière extrêmement simple

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P}$$

et pour le résoudre nous avons tenté de diviser les deux membres par la matrice $\mathbf{A}$ en nous demandant si cela avait un sens. La suite nous a montré que oui dans la mesure où nous avons pu changer cette division par $\mathbf{A}$ en une multiplication par $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

où l'inverse de la matrice $\mathbf{A}$ se calcule comme suit :

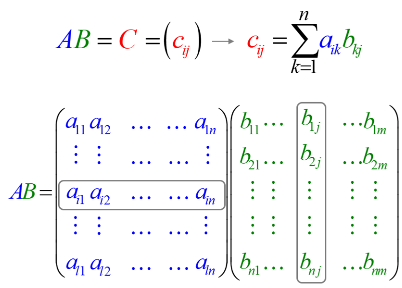
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

À présent que nous avons vu comment calculer l'inverse d'une matrice carrée (nous nous sommes limités au cas $2 \times 2$, mais nous aurons l'occasion de voir que c'est possible pour n'importe quelle matrice carrée dont le déterminant est non nul), nous pouvons résoudre l'équation matricielle ci-dessus en multipliant ses deux membres par $\mathbf{A}^{-1}$ (au lieu de diviser par $\mathbf{A}$) :

$$\overbrace{\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\,\mathbf{X}}^{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

Cette équation nous amène à penser que les deux facteurs de la multiplication $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ se neutralisent. Leur produit reste néanmoins une matrice, que nous nommerons *matrice identité* $\boldsymbol{I}$ car sa multiplication avec la matrice $\mathbf{X}$ la laisse inchangée.

Dans la vidéo consacrée à l'addition matricielle, nous avons introduit la notation compacte des matrices. Nous l'avons utilisée dans la vidéo consacrée à la multiplication matricielle pour écrire la formule tout à fait générale qui permet de calculer tous les éléments de la matrice $(c_{ij})$ qui est le produit entre une matrice $(a_{ij})$ et une matrice $(b_{ij})$ :




$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

« $c_{ij}$ est la somme pour $k$ allant de 1 à $n$ des $a_{ik}\, b_{kj}$. »

Cette formule traduit le fait que tout élément $c_{ij}$ de la matrice **C** est le produit scalaire entre la ligne $i$ de la matrice **A** et la colonne $j$ de la matrice **B**.

## La matrice identité d'ordre 2

Passons au calcul du produit de la multiplication $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ pour découvrir la matrice identité.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière égalité résulte du fait que $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$ ; il y a donc simplification une fois que la multiplication avec le scalaire $1/\det(\mathbf{A})$ a été effectuée.

Nous vérifions facilement que, comme nous l'avions écrit précédemment,

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\overbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{X}}^{\mathbf{X}}}_{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

Cette matrice particulière apparaît donc comme l'élément neutre pour le produit matriciel. C'est la matrice identité d'ordre 2 (de dimensions $2 \times 2$), qui est notée $\mathbf{I}_2$ ou, plus simplement **I**, avec la lettre *I* du mot « Identité » :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemple** Nous pouvons aussi vérifier que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ou encore que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pour notre matrice **A**, la même matrice identité (il en existe de dimensions différentes) est l'élément neutre aussi bien à droite que à gauche. Il est important de le vérifier car, en général, la multiplication matricielle n'est pas commutative.

## Généralisation aux ordres supérieurs

Il est très facile de généraliser la matrice identité à un ordre $n$ quelconque. Elle reste une matrice carrée, mais de dimensions $n \times n$ cette fois-ci, dont les éléments valent 1 sur sa diagonale principale et 0 partout ailleurs.

Nous pouvons la représenter de manière explicite, abrégée (en écrivant deux grands zéros pour remplacer tous les éléments nuls) ou en utilisant la notation compacte :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = (i_{pq}) \quad \text{avec} \quad i_{pq} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ si } p \neq q \end{cases}$$

Dans la dernière expression, nous exploitons le fait que chaque élément de la diagonale se trouve à la croisée d'une ligne et d'une colonne qui portent le même numéro d'ordre $(p = q)$, autrement dit que ses indices de ligne et de colonne sont identiques (il s'agit d'éléments du genre $i_{kk}$).

Nous venons de supposer que la matrice identité d'ordre $n$ est une matrice carrée. Cela découle des conditions sur les dimensions que doivent respecter les deux matrices dans un produit matriciel, et du fait que la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication matricielle.

En effet. Envisageons la multiplication entre une matrice identité **I** qui serait rectangulaire et une matrice quelconque **A**. Cette multiplication n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Il est donc indispensable que la multiplication soit de type $(l \times n) \cdot (n \times m)$. De la loi de la multiplication matricielle, il résulte que leur produit est une matrice $(l \times m)$ :

$$\underbrace{\mathbf{I}}_{l \times n} \underbrace{\mathbf{A}}_{n \times m} = \underbrace{\mathbf{A}}_{l \times m}$$

Or, la matrice identité étant l'élément neutre de la multiplication matricielle, le produit n'est autre que la matrice **A** elle-même. Ses dimensions ne peuvent pas être passées de $n \times m$ à $l \times m$, ainsi que la formule précédente semble le suggérer. Il fallait donc dès le départ que $l = n$. Et dans ce cas, la matrice identité **I** est bien une matrice carrée, et non une matrice rectangulaire.

## Élément neutre à droite et à gauche

Montrons à présent de manière générale que cette matrice identité est bien l'élément neutre pour la multiplication matricielle. Pour cela, considérons une matrice **A** quelconque, multiplions-la par la matrice identité et calculons le produit pour vérifier que nous retrouvons bien la matrice **A**.

Commençons par vérifier que $\mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{A}$, c'est-à-dire que $\mathbf{I}$ est bien neutre à droite.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I} \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} (a_{ik})(i_{kj}) \overset{\overset{2}{\downarrow}}{=} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} i_{kj}) \overset{\overset{3}{\downarrow}}{=} (a_{ij}) \overset{\overset{4}{\downarrow}}{=} \mathbf{A}$$

Les étapes du développement se justifient comme suit :

1. passage à la notation compacte ;
2. application de la loi de multiplication matricielle ;
3. utilisation de la propriété de la matrice identité $i_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ seulement si } k = j \\ 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$
   pour calculer chaque produit scalaire :
   $\sum a_{ik} i_{kj} = a_{i1} \underbrace{i_{1j}}_{0} + a_{i2} \underbrace{i_{2j}}_{0} + \cdots + a_{ij} \underbrace{i_{jj}}_{1} + \cdots + a_{in} \underbrace{i_{nj}}_{0} = a_{ij}$ ;
4. retour à la notation symbolique.

Le lecteur peut s'entraîner en vérifiant lui-même que $\mathbf{I}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$, c'est-à-dire que $\mathbf{I}$ est bien neutre à gauche aussi.

## Inverse d'un produit de matrices

Dans la vidéo précédente consacrée à la multiplication matricielle, nous avons vu que cette opération

— n'est pas commutative en général :
$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A};$$
— est distributive sur l'addition matricielle :
$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C};$$
— est associative :
$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C} = (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{C}).$$

La troisième propriété est bien utile pour en démontrer une quatrième : l'inverse d'un produit de matrices est le produit des inverses des matrices pris dans l'autre sens :

$$[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Dans ce but, commençons par calculer l'expression suivante :

$$\mathbf{A}\,\underbrace{\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{I}}\,\mathbf{A}^{-1} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$$

En vertu de l'associativité de la multiplication matricielle, nous pouvons choisir d'effectuer en premier lieu la multiplication $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$ dont le résultat est la matrice identité $\mathbf{I}$, qu'il n'est plus nécessaire d'écrire puisqu'elle est neutre pour la multiplication. Il ne reste alors plus que la multiplication $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ dont le résultat est aussi la matrice identité $\mathbf{I}$.

À présent, multiplions les membres extrêmes de cette égalité par $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$. Nous prenons soin d'effectuer cette multiplication à gauche dans les deux membres, puisque la multiplication matricielle n'est en général pas commutative. Nous obtenons :

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{I} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1}$$

Puisque la multiplication matricielle est associative, nous pouvons grouper les matrices à notre gré. Choisissons de grouper **A** et **B** :

$$[\mathbf{AB}]^{-1}[\mathbf{AB}]\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{AB}]^{-1}$$

Nous mettons ainsi en évidence la multiplication entre le produit $[\mathbf{AB}]$ et son inverse $[\mathbf{AB}]^{-1}$. Le résultat est égal à la matrice identité. Nous pouvons résumer ceci en simplifiant $[\mathbf{AB}]$ et $[\mathbf{AB}]^{-1}$. Finalement, il reste :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{AB}]^{-1}$$

Ceci est la quatrième propriété annoncée.

## Conclusion

Dès la première vidéo consacrée au calcul matriciel, nous avons rencontré les notions de multiplication de matrices et d'inverse de matrice. Il s'agissait de matrices $1 \times 1$ ou $2 \times 2$. À ce stade, nous avons généralisé la multiplication matricielle à des matrices quelconques $l \times m$ et nous en avons vu un certain nombre de propriétés. Mais concernant l'inverse d'une matrice, nous en sommes toujours restés au cas $2 \times 2$. Dans une vidéo ultérieure nous généraliserons le calcul de l'inverse d'une matrice à des dimensions $n \times n$ (nous verrons que l'inversion d'une matrice n'a de sens que si elle est carrée).

## Quiz

CliPéDia propose un quiz relatif à cette matière sur la page consacrée à cette vidéo, sous l'onglet Quiz.

**L'essentiel**

- La matrice identité **I** d'ordre $n$ est une matrice carrée $n \times n$ dont les éléments valent 1 sur sa diagonale principale et 0 partout ailleurs.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix} = (i_{pq}) \quad \text{avec} \quad i_{pq} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ si } p \neq q \end{cases}$$

- La matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication matricielle à gauche et à droite.

$$\mathbf{I}\ \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\ \mathbf{I}$$

- L'inverse d'un produit de matrices est le produit des inverses des matrices pris dans l'autre sens :

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$