Déterminants et transformations

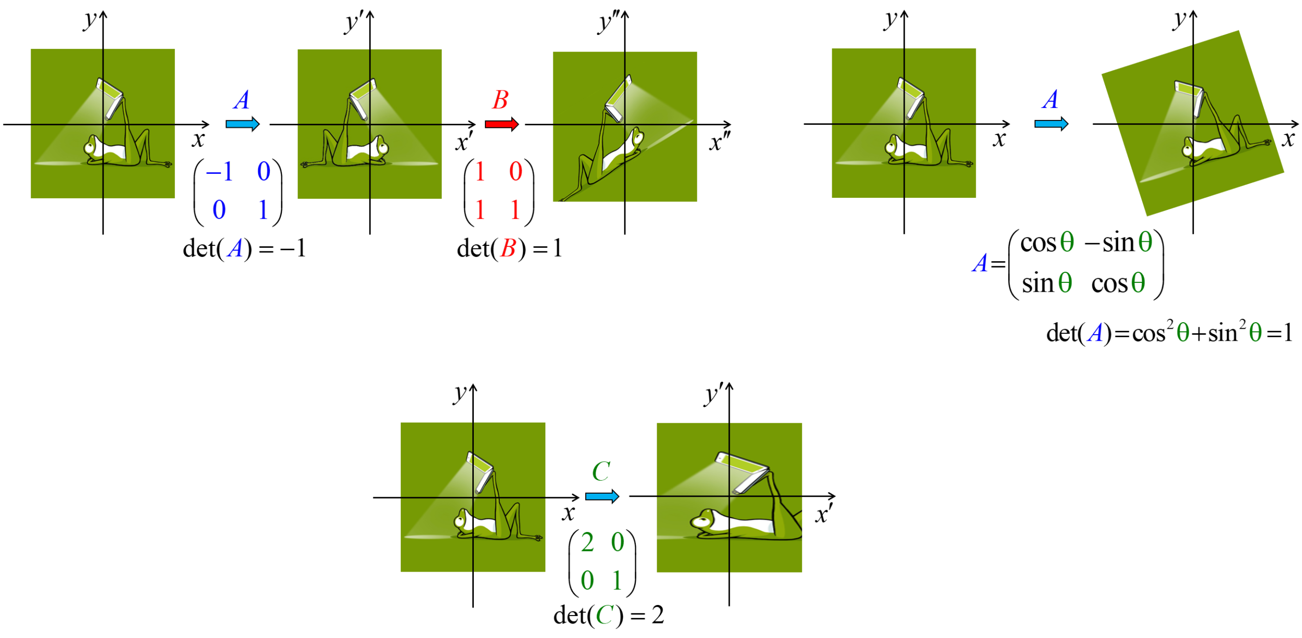
Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Les transformations dans le plan sont exploitées pour illustrer et interpréter le déterminant d'une matrice. Nous montrons qu'une transformation du plan modifie la surface (aire) qu'occupent un ensemble donné de points. Nous montrons que la valeur du déterminant d'une matrice donne le facteur de la dilatation des surfaces engendrée par la transformation que représente cette matrice.

Vidéo https://clipedia.be/videos/determinants-et-transformations

Quelques exemples

Dans la foulée de la vidéo précédente, continuons à utiliser les transformations pour illustrer les propriétés des matrices carrées 2×2 et, plus particulièrement ici, de leur déterminant. Commençons par passer en revue les transformations abordées dans la vidéo précédente. Dans chaque cas, observons les images avant et après transformation et notons la valeur du déterminant de la matrice correspondante.



Toutes ces transformations possèdent un déterminant de valeur absolue égale à 1, sauf la dernière dont le déterminant vaut 2.

Quel est le point commun à toutes ces transformations, excepté la dernière ? Quelle est la particularité de cette dernière transformation ? La réponse est qu'elle a subi une dilatation et, si nous observons bien les images transformées, nous voyons que la surface d'une portion donnée de l'image est agrandie (examiner par exemple l'oeil rond de la grenouille ou l'écran de son ordinateur). En particulier nous remarquons que le ventre blanc de la grenouille a doublé d'aire. Cette dilatation des surfaces n'est pas présente dans les autres transformations caractérisées par un déterminant unitaire.

Attention ! Vu que l'image est recadrée dans certains cas, il convient de comparer des détails des images, et pas les carrés dans lesquels elles s'inscrivent.

Il semble donc que la valeur du déterminant d'une matrice de transformation indique la proportion dans laquelle les aires sont modifiées par cette transformation.

Étude mathématique de la transformation

Dans cette section, nous nous emploierons à prouver que c'est effectivement le cas.

Envisageons comme transformation la combinaison linéaire la plus générale

$$\left\{\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array}\right.$$

dont la matrice est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Recherchons comment sont déplacés quelques points du plan sous cette transformation.

1. Le point $(0,0)$ reste en place.
2. Les points de l'axe x, pour lesquels $y = 0$, se transforment selon la loi

   $$\left\{\begin{array}{l} x' = ax \\ y' = cx \end{array}\right.$$

   En particulier, le point $(1,0)$, qui est l'extrémité du vecteurs de base $\vec{1}_x$, est envoyé en (a,c).
   De plus, les points du segment de droite compris entre $(0,0)$ et $(1,0)$ sur l'axe x sont envoyés sur le segment compris entre $(0,0)$ et (a,c). En effet, en éliminant x entre les deux équations précédentes, nous avons

   $$y' = \frac{c}{a} x'$$

   qui est bien l'équation d'une droite de pente c/a qui passe par l'origine $(0,0)$ et qui passe donc aussi par le point (a,c).
3. Les points de l'axe y, pour lesquels $x = 0$, se transforment selon la loi

   $$\left\{\begin{array}{l} x' = bx \\ y' = dx \end{array}\right.$$

   En particulier, le point $(0,1)$, qui est l'extrémité du vecteurs de base $\vec{1}_y$, est envoyé en (b,d).

De plus, les points du segment de droite compris entre $(0,0)$ et $(0,1)$ sur l'axe y sont envoyés sur le segment compris entre $(0,0)$ et (b,d). En effet, en éliminant y entre les deux équations précédentes, nous avons

$$y' = \frac{d}{b}x'$$

qui est bien l'équation d'une droite de pente d/b qui passe par l'origine $(0,0)$ et qui passe donc aussi par le point (b,d).

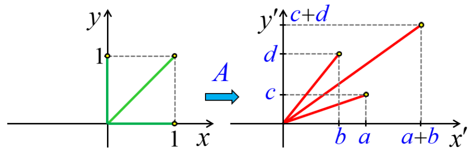
4. Le point $(1,1)$ est envoyé en $(a+c, b+d)$
   Et les points du segment de droite compris entre $(0,0)$ et $(1,1)$ sont envoyés sur le segment compris entre $(0,0)$ et $(a+b, c+d)$. En effet, puisque $y = x$ pour tous ces points, nous pouvons effectuer cette substitution dans les équations de la transformation puis éliminer x entre elles pour obtenir finalement

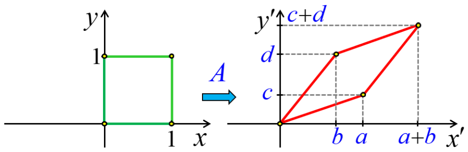
$$y' = \frac{c+d}{a+b}x'$$

   qui est bien l'équation d'une droite de pente d/b qui passe par l'origine $(0,0)$ et qui passe donc aussi par le point $(a+b, c+d)$.

Remarquons que les coordonnées des vecteurs de base $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$ transformés sont bien égales aux éléments des deux colonnes de la matrice de transformation, soit $(1,0) \to (a,c)$ et $(0,1) \to (b,d)$.

Nous avons établi dans trois cas particuliers que la transformation conserve les segments de droite. Cette propriété n'est pas étonnante puisque la transformation étudiée est une transformation *linéaire*.



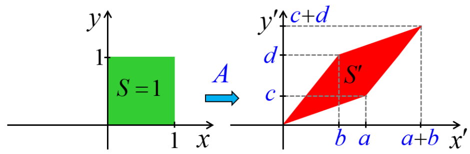


Nous pouvons encore construire la somme vectorielle $(a+c, b+d)$ par la méthode du parallélogramme, en reportant le vecteur (a,c) à partir de l'extrémité du vecteur (b,d) ou *vice versa*.

Aire du parallélogramme

Examinons à présent les aires de deux figures, un carré et un rectangle.

Les vecteurs que nous avons envisagés dans la figure avant transformation permettent de construire un carré de côté égal à 1. Son aire vaut donc $S = 1$.



Mais que vaut l'aire S' du parallélogramme qui est la transformation du carré ?

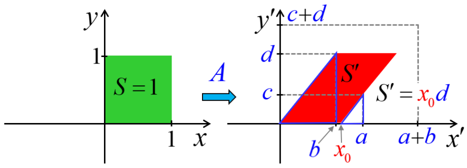
Pour la calculer, glissons-en le morceau triangulaire qui se trouve au-dessus de $y = d$ pour l'amener le long de l'axe x (voir figure suivante). Nous formons ainsi un parallélogramme différent, de même aire, et celle-ci est plus aisée à calculer. Rappelons que, pour un parallélogramme,

$$\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

Sur la figure ci-dessous nous voyons de la hauteur vaut d qui est un des éléments de la matrice de transformation, et nous voyons aussi que sa base vaut x_0, mais cette dernière doit encore être calculée. Ensuite, nous aurons simplement

$$S' = x_0 d$$

Pour calculer x_0, exploitons les deux triangles semblables (leurs côtés sont parallèles deux à deux) et écrivons que les côtés homologues sont dans les mêmes proportions :



$$\frac{b}{d} = \frac{a - x_0}{c}$$

Nous en déduisons que

$$x_0 = a - \frac{bc}{d}$$

En multipliant cette expression de x_0 par d, nous obtenons finalement

$$S' = ad - bc = \det(\mathbf{A})$$

L'aire du parallélogramme qui résulte de la transformation d'un carré d'aire unité n'est en fin de compte rien d'autre que le déterminant de la transformation. Ce déterminant est donc bien le facteur par lequel la transformation modifie les aires (agrandissement ou rétrécissement selon qu'il est plus grand ou plus petit que 1). Si l'aire de départ est S, alors l'aire transformée vaut $S' = S\det(\mathbf{A})$. Terminons en rappelant que le déterminant d'une rotation vaut 1 et en notant que, en effet, cette transformation ne modifie pas les aires.

Transformation à déterminant nul

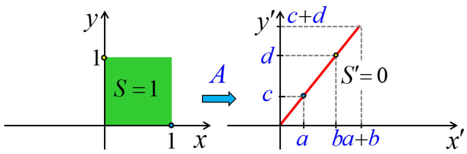
Comme nous l'avons vu précédemment, si le déterminant d'une matrice est nul alors il n'est pas possible de calculer l'inverse de cette matrice. Qu'en est-il en termes de transformation ? Pour le découvrir, exploitons le fait que $\det \mathbf{A} = 0$. Nous pouvons en déduire que

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Sous cette forme, nous avons fait apparaître deux quotients qui ne sont autre que les pentes des côtés du parallélogramme (revoir la 1re figure de la page 3), c'est-à-dire les pentes de vecteurs qui sont les transformés des vecteurs $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$. Et s'ils ont la même pente, alors ils se trouvent sur la même droite oblique.

Le parallélogramme est donc réduit à un segment de droite. La figure ci-contre illustre la situation pour une valeur de a modifiée, diminuée, de telle manière à annuler le déterminant.

L'aire du parallélogramme est donc nulle. Nous retrouvons le cas d'une transformation dans laquelle l'information de l'image est perdue. (L'image, une surface qui possède deux dimensions, est transformée en un segment, qui ne possède qu'une seule dimension.)

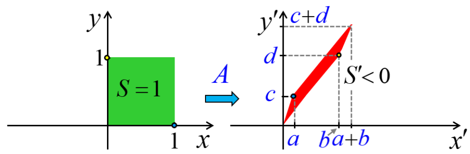


Transformation à déterminant négatif

Nous avons rencontré cette situation pour la symétrie axiale, le déterminant de la matrice de transformation valant -1. Si nous envisageons le cas où $\det(\mathbf{A}) < 0$ pour notre transformation générale, alors le nouveau parallélogramme ainsi formé après transformation possède donc une aire négative. Qu'est-ce que cela signifie ?

Afin d'obtenir une interprétation visuelle de cette situation, diminuons encore la valeur de a de telle sorte que $ad - bc$ devienne négatif. Sur la figure ci-contre, nous voyons que le vecteur (a, c) possède à présent une pente plus grande que celle du vecteur (b, d).

Ainsi, le sens dans lequel il faut tourner pour passer du vecteur (a, c) au vecteur (b, d) après cette transformation-ci est inversé par rapport au sens dans lequel il fallait tourner après la première transformation.



Une vis qui tournerait dans ce premier sens ressortirait de la surface tandis qu'une vis qui tournerait dans le second sens s'y enfoncerait. Nous pouvons utiliser le sens de progression de cette vis pour définir une orientation de la surface et attribuer un signe $(+$ ou $-)$ à son aire. Nous ferons la convention que si la vis ressort de la surface, son aire est positive, et que si la vis y pénètre son aire est négative.

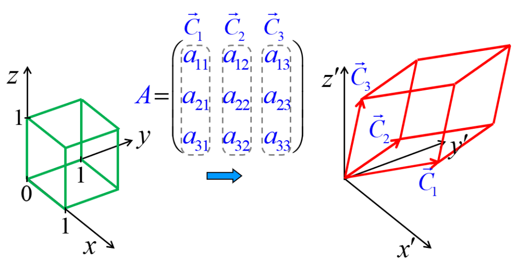
Dans la vidéo, une présentation plus visuelle de la même explication est donnée, qui se fonde sur l'orientation des doigts de la main droite. Dans ces notes il a paru plus facile à son auteur de donner l'explication qui précède.

Un autre exemple encore : le mot ƎƆИA⅃UᙠMA apposé sur le capot d'une ambulance a été retourné par rapport à l'écriture normale et il est difficile de le lire tel quel. Tout autant que de le lire sur cette feuille, quelle que soit la manière de l'orienter, sauf à retourner la feuille et à regarder par transparence ou encore à regarder le reflet du mot dans un miroir. En revanche, le conducteur d'une voiture qui serait suivi par l'ambulance pourrait le déchiffrer sans peine dans son rétroviseur. En fait, les mots AMBULANCE et ƎƆИA⅃UᙠMA sont retournés l'un par rapport à l'autre, ils sont les résultats de symétries axiales l'un de l'autre, transformations dont le déterminant vaut -1, et leurs aires possèdent des signes opposés.

Finalement, le changement de signe de l'aire d'une image et le signe négatif du déterminant de la matrice de transformation est interprété par l'effet d'un retournement dans la transformation (qui peut bien entendu ête combiné à des effets supplémentaires, tels que dilatation, glissement, rotation).

Généralisation

Si nous envisageons les matrices 3×3, nous pourrons les interpréter comme des matrices de transformation de volumes, figures à trois dimensions. Une telle transformation changera un cube d'arête 1 et de volume 1, dont les faces sont des carrés, en un parallélépipède non rectangle, dont les faces sont des parallélogrammes, et dont le volume est égal au déterminant de la matrice de transformation.



Ici encore les éléments des colonnes successives de la matrice sont les coordonnées des vecteurs de base successifs transformés (coordonnées transformées de $\vec{1}_x$ dans la 1re colonne C_1, de $\vec{1}_y$ dans la 2e colonne C_2 et de $\vec{1}_z$ dans la 3e colonne C_3).

Vidéo Dans une autre vidéo, nous avons vu que ce volume peut aussi être calculé par le produit mixte $(\vec{1}'_x \times \vec{1}'_y) \cdot \vec{1}'_z$, où $\times$ représente un produit vectoriel et $\cdot$ représente un produit scalaire.
Rendez-vous à 2 min 27 s dans cette vidéo en suivant ce lien : https://clipedia.be/videos/le-produit-vectoriel-interpretation-geometrique-et-produit-mixte.
Ou bien aller directement à ce passage sur Youtube.

Il est possible de montrer que ce produit mixte est égal au déterminant de la matrice de transformation.

L'essentiel

- À deux dimensions, la combinaison linéaire la plus générale est

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- La matrice de transformation correspondante est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Un segment de droite avant transformation reste un segment de droite après une telle transformation, mais en général d'orientation et de longueur différentes.
- Le déterminant de la matrice de transformation est le facteur par lequel l'aire d'une surface avant transformation doit être multipliée pour obtenir l'aire de la surface après une telle transformation

$$S' = S \det(\mathbf{A})$$

- Si le déterminant de la matrice de transformation est nul, l'image initiale qui était une surface avant transformation se réduit à un simple segment de droite après transformation. Il n'est pas possible de trouver l'inverse de cette matrice.
- Si le déterminant de la matrice de transformation est négatif, la transformation provoque notamment un retournement de l'image (éventuellement combiné à une dilatations ou contraction, à un glissement, à une rotation).