Les matrices - Déterminants 3×3

Notes rédigées par Laurent Zimmermann

Résumé À l'aide des notions de produits vectoriel et mixte, nous généralisons le concept de déterminant au cas des matrices carrées 3×3.

Vidéo https://clipedia.be/videos/determinant-3x3

Cette séquence exploite les notions de produit vectoriel et de produit mixte. https://clipedia.be/videos/le-produit-vectoriel-interpretation-geometrique-et-produit-mixte
Il est nécessaire de bien connaître ces notions pour comprendre cette séquence-ci.

L'essentiel

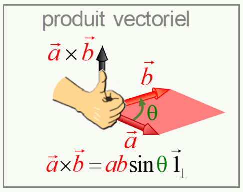
- Une matrice $\mathbf{A}$ de dimension 3×3 peut être vue comme étant composée de trois vecteurs colonnes. En notant ces vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$

- Ces trois vecteurs ne sont dès lors autres que les transformations par cette matrice $\mathbf{A}$ des trois vecteurs de base $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Le produit vectoriel $\vec{v} \times \vec{w}$ est un vecteur $\vec{S}$ dont l'orientation est donnée par la règle de la main droite et dont la valeur est égale à l'aire de la surface du parallélogramme construit sur les vecteur $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

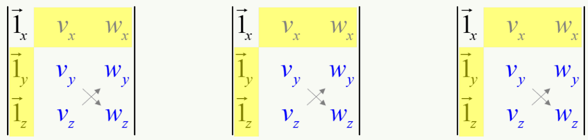


- Une règle mnémotechnique a été imaginée pour le calculer :
  - ▷ écrire le produit vectoriel sous la forme d'un tableau dont la première rangée (ligne ou colonne) contient les trois vecteurs de base et dont les rangées suivantes contiennent les composantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & v_x & w_x \\ \vec{1}_y & v_y & w_y \\ \vec{1}_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

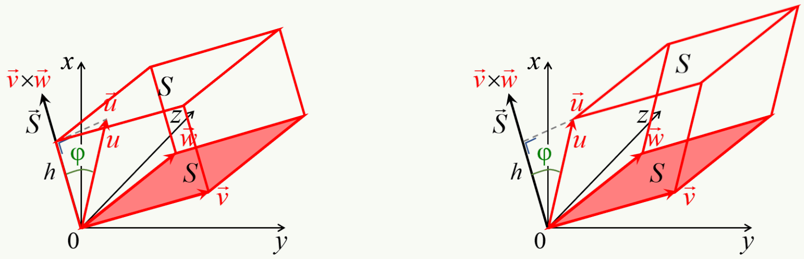
  - ▷ multiplier chaque vecteur de base par le déterminant 2×2 qui subsiste dans le tableau après avoir éliminé le reste de sa ligne et de sa colonne ;
  - ▷ additionner les trois résultats, en changeant le signe de celui obtenu avec $\vec{1}_y$:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{1}_x(v_y w_z - v_z w_y) - \vec{1}_y(v_x w_z - v_z w_x) + \vec{1}_z(v_x w_y - v_y w_x)$$



- Les composantes $(v_{\ldots}w_{\ldots} - v_{\ldots}w_{\ldots})$ sont respectivement les aires des projections sur les plans yz, xz et xy du parallélogramme construit sur $\vec{v}, \vec{w}$.
- Le produit mixte $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ est un scalaire. Sa valeur est le volume du parallélépipède (oblique) construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

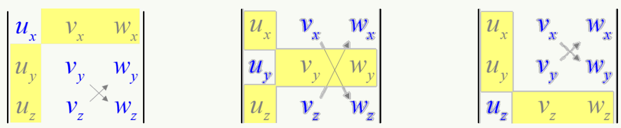
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{S} = Su\cos\varphi = Sh = V$$



N.B. : glisser la face supérieure du parallélépipède droit parallèlement à elle-même le déforme en un autre parallélépipède, oblique, mais volume identique.

- De par la définition du produit scalaire, le produit mixte $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ s'obtient naturellement à partir du tableau de calcul du produit vectoriel $\vec{v} \times \vec{w}$ où les vecteurs de base sont remplacés par les composantes du vecteur $\vec{u}$.

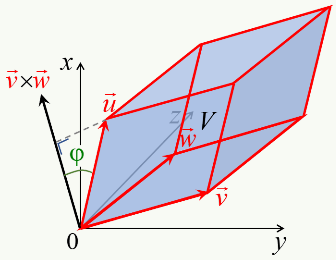
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \\ &= u_x(v_y w_z - v_z w_y) - u_y(v_x w_z - v_z w_x) + u_z(v_x w_y - v_y w_x) \end{aligned}$$

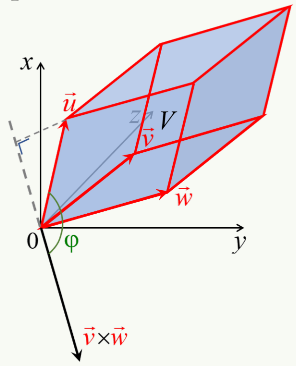


- Le tableau qui résulte de cette opération est le déterminant de la matrice A.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

- Il peut être positif, négatif ou nul. Il en va donc de même pour le volume du parallélépipède. La situation est déterminée par l'angle φ compris entre $\vec{u}$ et $\vec{S} = \vec{v} \times \vec{w}$.





  ▷ Si $0° \leq \varphi < 90°$, le volume est positif. C'est le cas lorsque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment un trièdre dextrogyre (*cf.* règle de la main droite).
  ▷ Si $90° < \varphi \leq 180°$, le volume est négatif. C'est le cas lorsque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment un trièdre lévogyre.
  ▷ Si $\varphi = 90°$, le volume est nul. C'est le cas lorsque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (l'un est alors une combinaison linéaire des deux autres), avec pour conséquence que $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v} \times \vec{w}$.

- Finalement, le déterminant d'une matrice 3×3 a pour valeur absolue le volume du parallélépipède construit sur ses trois vecteurs colonnes. Son signe indique si ces vecteurs forment un trièdre dextrogyre (signe $+$) ou lévogyre (signe $-$).