Les matrices - Déterminants : généralisation

Notes rédigées par Laurent ZIMMERMANN

Résumé Nous généralisons la notion de déterminant à des matrices carrées de dimension supérieure à 3 et nous en donnons l'interprétation géométrique.

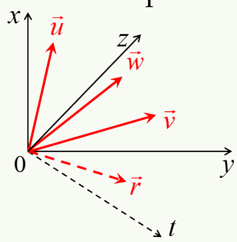
Vidéo https://clipedia.be/videos/determinant-generalisation

L'essentiel

- Le déterminant d'une matrice *détermine* si l'inverse de cette matrice existe. Comme seules les matrices carrées peuvent être inversées (sauf exception), et jamais les matrices rectangulaires (toute tentative d'inversion d'une matrice rectangulaire conduirait immanquablement à un système d'équations sous-déterminé ou surdéterminé), seuls les déterminants de matrices carrées sont définis.
- Le déterminant d'une matrice 2×2 correspond à une aire orientée, tandis que le déterminant d'une matrice 3×3 correspond à un volume orienté, ce dernier étant obtenu par la somme algébrique de trois volumes élémentaires qui sont chacun le produit d'une aire (déterminant 2×2) par une longueur.
- Une matrice $\mathbf{A}$ de dimension 4×4 peut toujours être vue comme formée de quatre vecteurs colonnes, notés $\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ à quatre composantes chacun. Géométriquement, ils appartiennent à un espace à quatre dimensions. Les vecteurs unitaires de base dans cet espace, notés $\vec{1}_t, \vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$, sont perpendiculaires deux à deux.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_t \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_t \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$

- L'agencement de tous ces vecteurs dans l'espace quadridimensionnel n'est pas concevable mentalement. Leur représentation sur un schéma ne permet pas non plus de rendre une perspective entièrement intelligible. Les tracés dans la « quatrième dimension » seront dessinés en traits interrompus.



- Le déterminant de cette matrice **A** est la généralisation à quatre dimensions du produit mixte. Il fait intervenir le produit scalaire entre un vecteur ($\vec{r}$) et le résultat du produit vectoriel de trois vecteurs ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$). En effet, dans un espace à *quatre* dimensions, le produit vectoriel est défini entre *trois* vecteurs.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = \vec{r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{1}_t & u_t & v_t & w_t \\ \vec{1}_x & u_x & v_x & w_x \\ \vec{1}_y & u_y & v_y & w_y \\ \vec{1}_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

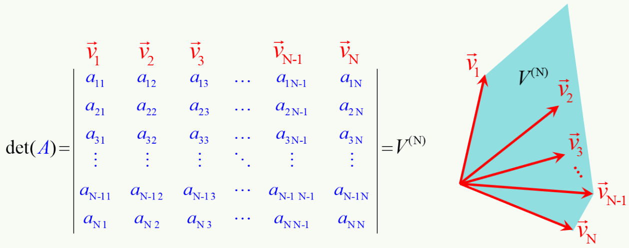
  - ▷ Le produit vectoriel du dernier tableau se calcule en appliquant la même règle que dans la séquence précédente :
    multiplier chacun des quatre éléments de la première colonne par le déterminant 3×3 *qui subsiste en cachant toute la ligne et toute la colonne de cet élément, puis additionner les quatre résultats, en ayant préalablement changé le signe du 2^e^ et du 4^e^.*
  - ▷ Ensuite, le produit scalaire s'effectue en additionnant les produits deux à deux respectivement des composantes t, x, y et z.
  - ▷ En fin de compte, le calcul du déterminant s'effectue en appliquant la même règle que pour le calcul du produit vectoriel.

$$\begin{vmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} r_t & u_t & v_t & w_t \\ r_x & u_x & v_x & w_x \\ r_y & u_y & v_y & w_y \\ r_z & u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) =$$
$$r_t \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} - r_x \begin{vmatrix} u_t & v_t & w_t \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} + r_y \begin{vmatrix} u_t & v_t & w_t \\ u_x & v_x & w_x \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} - r_z \begin{vmatrix} u_t & v_t & w_t \\ u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix}$$

- Dans cette expression, les quatre déterminants 3×3 correspondent à des volumes de parallélépipèdes et le déterminant 4×4 correspond, lui, à l'*hypervolume* d'un *parallélotope* à 4 dimensions.
  - ▷ Un *hypervolume* est le volume d'une figure géométrique à plus de 3 dimensions.
  - ▷ Un *parallélotope* est une figure géométrique à plus de 3 dimensions dont les « faces » sont des parallélépipèdes.

- L'interprétation et la règle de calcul du déterminant d'une matrice carrée à 3 ou 4 dimensions se généralisent à une matrice carrée à un nombre N quelconque de dimensions.



  - ▷ Son déterminant est le produit mixte généralisé du premier vecteur colonne avec le produit vectoriel généralisé à N dimensions des $N-1$ vecteurs colonnes suivants :
$$\det(\mathbf{A}) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \times \ldots \times \vec{v}_N)$$
  - ▷ Il correspond à l'hypervolume V^N d'un parallélotope à N dimensions.
  - ▷ Il se calcule, ici encore, en additionnant les produits de chaque élément de la première colonne avec le déterminant qui subsiste en cachant le reste de sa ligne et de sa colonne, en ayant préalablement changé les signes des 2ᵉ, 4ᵉ, 6ᵉ ... termes.

- Ainsi, le calcul d'un grand déterminant fait appel à plusieurs déterminants « un cran » plus petits, qui font à leur tour chacun appel à plusieurs autres déterminants encore « un cran » plus petits, et ainsi de suite, jusqu'à une multitude de déterminants 2×2, et finalement 1×1 qui sont les éléments de la matrice elle-même...
Un véritable jeu de poupées russes ! Il y a $N!$ déterminants à calculer, de toutes tailles.